ALGEBRA — PRIMEIROS PASSOS

O. DE SOUZA REIS

DO MESMO AUTOR

Livro da Previdencia, leituras moraes para a escola primaria. *Adoptado pela D. G de Instrucção Publica.* 2ª edição, completamente refundida. Um volume cartonado .... 3$0

Quadros Muraes para o Ensino da Leitura, collecção de 36 lições em 18 quadros, optimamente impressos, para os profs. que adoptam o processo da articulação. *Adoptados pela D. G. de Instrucção Publica.* Collecção, cartonada.. 35$0

Manual de Geographia, para uso do curso médio das escolas primarias. *Adoptado pela D. G de Instrucção Publica* Um volume brochado .... 2$0

Manual de Geographia Elementar e Noções Rudimentares de Physiographia, para uso do curso complementar das escolas primarias. *Adoptado pela D. G. de Instrucção Publica.* 2ª edição. Um volume, cartonado.. 4$00

Nova Cartilha Infantil, de conformidade com os *Quadros Muraes*, com um parecer da prof. D. Olympia do Coutto. *Adoptada pela D. G. de Instrucção Publica.* Um vol. cart. $70

Evolução das formas topographicas litoraes, introducção ao estudo descriptivo dos typos de costa. These de concurso ao logar de substituto do Collegio Pedro II........ $00

500 Expressões Fraccionarias, para pratica do calculo arithmetico. Com um prefacio do Dr. Francisco Cabrita. Um volume encadernado, percaline.................... 6$000

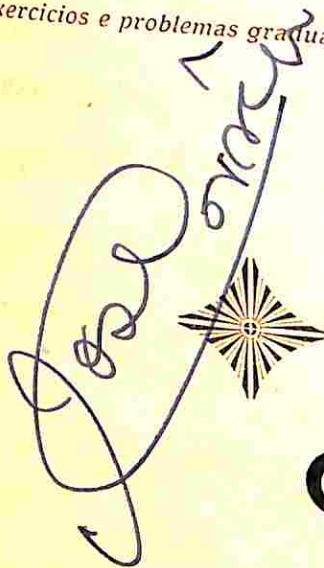
Noções de Historia do Brazil, *Adoptadas pela D. G. de Instrucção Publica.* 2ª edição completamente refundida. Um volume cartonado.................................. 4$000

O. DE SOUZA REIS

Professor substituto do Collegio Pedro II e Docente da Escola Normal

Algebra — Primeiros Passos

OU INTRODUCÇÃO AO ESTUDO DESTA SCIENCIA,
DESTINADA AOS ALUMNOS DE ARITHMETICA,
PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Exercicios e problemas graduados e resolvidos.

RIO DE JANEIRO
LIVRARIA DRUMMOND - EDITORA
76 - RUA DO OUVIDOR - 76
1919

PREFACIO

E' este livrinho a realização pratica daquillo que constituiu o objecto de minha conferencia, realizada na Bibliotheca Nacional, na série instituida pelos inspectores escolares do Districto Federal.

Esse trabalho, intitulado — *Os dois ultimos annos de arithmetica na escola primaria, segundo a Commissão dos Quinze* —, recebeu dos competentes os mais desvanecedores encomios; não, certamente, pelo que foi, mas pela intenção com que o fiz. Reproduzindo-o como prefacio, está feita a justificação desta obra.

«Srs. Professores. Minha presença, aqui, hoje, a ninguem mais do que a mim mesmo espanta. Avêsso, por temperamento e por educação, a me exhibir perante publico mais numeroso do que o das minhas aulas, reiteradas vezes recusei a honra de vos dirigir a palavra, principalmente em uma série de leituras em que já haviam brilhado os nomes aureolados de Afranio Peixoto, Cabrita e Francisco Vianna.

Cedi, afinal, porque me foi assegurado que não se tratava senão de vos referir, em a linguagem mais desataviada, alguma coisa elementar que me tivesse sido dado conhecer, e que vos interessasse.

Longe estava, porém, de mim, a idéa de que tão numeroso auditorio se congregasse nesta sala, e ousei até esperar que não tivessemos mais que uma reunião quasi familiar. Enganei-me, e ahi tendes porque, ainda neste derradeiro momento, me sinto quasi inhibido de falar.

O assumpto que escolhi não comporta divagações rhetoricas, nem surtos philosophicos ou poeticos. Serei, pois, absolutamente simples, renunciando ás pompas do estylo, á vangloria de ostentar erudição e á possibilidade de polvilhar de leve humorismo esta palestra. Falarei para os que querem realmente ouvir, e pela materia se interessam.

Não será, de certo, necessario dizer-vos que o Relatorio da Commissão dos Quinze, a proposito da educação primaria, é o grande compendio, a biblia da pedagogia moderna americana. Neste livro tão pequeno, nesta brochura de duzentas paginas, cuja traducção e divulgação deveria emprehender a Directoria de Instrucção Publica, estão admiravelmente condensados todos os principios directores, todas as normas adeantadas do ensino elementar dos Estados Unidos.

Os Quinze, que para esta empreza foram designados, são acatadissimas e reputadas autoridades, que não desdenharam de se dirigir ainda a outros competentes experimentados.

Todos os problemas importantes aqui encontrareis por elles abordados e, sem superfetação de doutrinas, abstracções e philosophias, sem verbiagem nem preconceitos, referidas em termos claros e positivos as soluções que parecem mais praticas.

Se tomardes este precioso repositorio e lerdes o que, a proposito do ensino da mathematica refere William Harris, que era o Commissario, ou Director, de Educação dos Estados Unidos, vereis que lá. como aqui, os pedagogos censuram a difficuldade e a confusão de que se revestem os raciocinios necessarios para se resolverem os problemas de arithmetica das classes adeantadas.

Ora são problemas realmente difficeis, ora questões relativamente faceis, mas para cuja solução se tornam necessarias tantas palavras, tantas periphrases, tantas circumstancias, que o alumno, depois de um grande esforço cerebral, do exercicio não aufere proveito mental apreciavel.

São questões cujo enunciado parece, frequentemente, uma charada, e cuja solução se assemelha a um disparatado jogo de palavras sem sentido connexo.

Todos os dias se nos deparam problemas deste genero, ao mesmo tempo faceis e difficilimos. Trago-vos um delles:

"Se á metade do numero de dias decorridos do anno, juntarmos $1/3$ dos que ainda restam, obteremos o numero dos dias decorridos. Em que dia do anno estamos?"

O problema não é, positivamente difficil. Explicae-o, porém, e pedi-lhe o raciocinio. Conto que não o recebereis muito melhor do que o seguinte, que me foi dado ler:

"Representemos por $2/2$ o numero de dias decorridos. Se juntando á metade dos dias decorridos uma certa quantidade, obtemos o numero dos mesmos dias decorridos, é claro que o que juntamos é a outra metade. Mas como, pelo problema, juntámos $1/3$ dos dias que restam, concluimos que $1/3$ dos dias que restam representa $1/2$ dos dias decorridos, portanto $3/3$ dos que restam representam $1/2 \times 3 = 3/2$ dos dias decorridos.

Se juntarmos $2/2$, numero dos dias decorridos, a $3/2$, numero dos dias que restam, teremos o anno inteiro, representado por $2/2 + 3/2 = 5/2$ dos dias decorridos. Dahi, $5/2$ dos dias decorridos representam 365 dias, $1/2$ representa 5 vezes menos, etc., etc."

Vêde que, escripto, o raciocinio é extremamente complexo e confuso. Será incomprehensivel se, querendo dar-lhe uma forma um tanto cuidada, o alumno evitar a repetição de palavras e a referencia de todas as minucias.

Poderia dar-vos, se o tempo não fosse tão escasso, numerosos exemplos de charadas da mesma especie, não inventadas, mas colhidas em cadernos de alumnos de varias escolas.

E' para evitar essa acrobacia de palavras e esse trabalho excessivo do cerebro, que, entende a pedagogia moderna, deve-se trazer para a escola primaria o methodo algebrico.

Não ha, Snrs. Professores, como justificar aquelles que, achando a arithmetica uma valiosa gymnastica mental, della abusam, convertendo-a em instrumento de supplicio. A verdade é que, se a consideramos como meio de desenvolvimento, ou de treinamento cerebral, esses raciocinios são exercicios estafantes, e se a consideramos sob o ponto de vista das meras applicações praticas, são meios excessivamente morosos e difficeis.

Ponderando estas razões, concluiram os membros da Commissão dos Quinze que, applicados os bons methodos, e distribuido judiciosamente o tempo nos annos anteriores, os dois ultimos podem e devem ser dedicados ao methodo algebrico de lidar com os problemas, pelo menos com os problemas difficeis, e, ainda, que esse methodo pode ser ensinado *logo após as quatro operações sobre inteiros e quebrados.*

Tres annos antes, já a Commissão dos Dez, incumbida dos estudos a respeito do ensino secundario, e cujo relatorio, traduzido pelo meu eminente mestre Snr. Said Ali Ida e publicado na *Revista Pedagogica* em 1896, é tambem obra de valor não commum, recommendava — que o estudo da algebra systematica deve começar aos quatorze annos, mas, em connexão com o estudo da arithmetica, os alumnos devem ser familiarizados desde mais cedo com as expressões e os symbolos algebricos, e com os methodos de resolver equações simples.

Poderia citar-vos numerosos autores, que abonam quanto estou a dizer. Limito-me a indicar-vos Bourlet, no seu artigo sobre a mathematica, no *Diccionario de Pedagogia* de Buisson, e no *Curso resumido de arithmetica*; Leyssenne,

na sua *Arithmetica, curso superior*; Wentworth, o grande pedagogo a quem se devem, entre outras obras preciosas, os *Primeiros passos na algebra*; John Walsh, nos *Methodos praticos de arithmetica*, e finalmente, *last but not least*, o emerito professor Francisco Cabrita, em dois artigos que publicou em a *Escola Primaria*, apoiando e desenvolvendo o assumpto, de que eu anteriormente me occupara.

O conhecido e conceituado mestre, a quem ha muito me acostumei a render as mais vivas homenagens de admiração e de profundo respeito, o batalhador franco, leal, activo e desinteressado de todas as campanhas do ensino, disse, textualmente, ao terminar um daquelles artigos:

“E' claro que a algebra que se pretende inculcar ao professor primario como subsidio de alto valor para o seu ensino de arithmetica é limitada ao estudo elementar das equações numericas, independentemente do conhecimento de monomios, binomios, trinomios, polynomios, e do calculo correlativo. As theorias da addição, subtracção, multiplicação e divisão de expressões algebricas podem e devem ser dispensadas, ou pelo menos adiadas para o curso secundario”.

Não tenho, pois, em duvida se se deve ou não, se se pode ou não, introduzir na escola primaria o estudo rudimentarissimo da algebra, sufficiente para a solução de certos problemas. Concedo que não devamos chegar logo ás equações do 2º grão, mas as do 1º podem ser, sem difficuldade, apresentadas.

Ha, porém, um grande obstaculo a vencer, e é — a rotina. Eu bem conheço a enorme antipathia de que é victima este ramo da mathematica. E' que o estudo da algebra quasi sempre indispõe com a algebra o discipulo...

Não quero dizer que não saibam algebra os docentes das escolas primarias. De muitos o tenho ouvido, como confissão, mas sei que faltam á verdade. Habituaram-se

a consideral-a como uma disciplina alheia á escola primaria, e é tudo.

Mas eu vos asseguro que não ha propriamente — a algebra, mas o *methodo algebrico*, que podeis ensinar, porque ensinaes coisas infinitamente mais difficeis. Podeis, e deveis, porque as materias de vossos programmas crescem todos os dias, o alumno tem de aprender cada vez mais, e em pouco tempo, e nós não temos o direito de o privar de um meio facil, rapido e commodo de vencer numerosas difficuldades mathematicas. E' porque o ensino da algebra não está em vossas mãos, Snrs. professores das escolas primarias, que até hoje ella constitue um desses preparatorios de que se tira exame de qualquer modo, e que nas escolas superiores, exceptuadas aquellas onde o estudo da mathematica se prosegue, são tão poucos os alumnos capazes de resolver á primeira vista uma equação das mais faceis.

Sim, podeis ensinar algebra, desde que não ultrapasseis os limites marcados pelo relatorio dos Quinze e por quantos pedagogos trataram do assumpto.

Vejamos agora, bem praticamente, como podereis conduzir vossos discipulos nos primeiros passos da algebra. Descerei, ainda mais, á planicie da linguagem chan das aulas de crianças. Perdoae-me essa excessiva simplicidade, com que não vos quero offender a notoria competencia. O que desejo é evidenciar como, sem nenhum preparo anterior, a não ser o conhecimento das quatro operações sobre inteiros e quebrados, pode uma criança realizar esta africa da resolução das equações.

A primeira coisa a fazer é familiarizar o alumno com o emprego das letras para a representação das quantidades, como se fossem, por exemplo, iniciaes de nomes que nos

dispensamos de escrever. Na algebra elementarissima da escola primaria não lidamos, habitualmente, em cada problema, senão com uma lettra, por meio da qual representamos a quantidade desconhecida, o numero que satisfaz ás condições do problema. Tal numero é representado pela letra x. Mais raramente necessitaremos de outros symbolos, e virão o y, o z, etc.

Para ensinar intuitivamente ao alumno o modo de lidar com este symbolo x, façamol-o representar por x um objecto cujo nome ignore, e em seguida contar numerosos desses objectos. Elle contará: um objecto, dois objectos, tres... quinze objectos, ou coisas, ou emfim: um x, dois x, tres x... quinze x.

Pode pois o discipulo escrever

$$15\ x,$$

do mesmo modo que escreveria

15 lapis
ou 15 canetas.

Supponhamos agora que, contados em um logar, ha

$$12\ x$$

e em outro logar

$$7\ x.$$

Qualquer criança nos dirá quantos objectos da especie x existem ao todo, effectuando a somma

$$12\ x + 7\ x = 19\ x.$$

Qualquer criança nos dirá tambem quantos objectos nos sobrarão, caso retiremos dos 12, que possuimos, 7 objectos da mesma especie:

$$12\,x - 7\,x = 5\,x.$$

Estamos assim, pouco a pouco, penetrando na algebra. Não será um passo muito grande imaginarmos que uma pessoa possue 10 objectos da especie x, adquire mais 6, dá 3, compra mais 8, perde 5, o que assim se representa:

$$10\,x + 6\,x - 3\,x + 8\,x - 5\,x.$$

Qualquer alumno, até da classe elementar, saberá procurar com quantos objectos fica afinal a pessoa: sommando aquillo que possue e que adquire, sommando aquillo de que se desfalca, e avaliando a differença:

$$\begin{array}{r} 10\,x \\ 6\,x \\ 8\,x \\ \hline 24\,x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,x \\ 5\,x \\ \hline 8\,x \end{array}$$

$$24\,x - 8\,x = 16\,x.$$

Teremos feito entrar, assim, a quantidade representada por x quer em sommas, quer em subtracções. Para multiplicar, imaginemos o seguinte:

"Aqui estão 16 caixas; dentro de cada caixa ha 4 objectos daquelles que representamos por x. Quantos x ha ao todo?"

Se o alumno estiver perfeitamente convencido de que x é uma coisa, não hesitará, porque, do mesmo modo que em 16 caixas, cada uma com 4 maçãs, sabe que ha ao todo

4 maçãs repetidas 16 vezes, ou $4 \times 16 = 64$ maçãs em 16 caixas, cada uma com $4\,x$, sabe que ha ao todo

$$4\,x \text{ repetidos 16 vezes, ou } 4\,x \times 16 = 64\,x.$$

Da divisão, é ocioso tratar, pois está implicita na propria multiplicação. Assim como de 64 maçãs, distribuidas por 16 caixas, cabem 4 maçãs a cada caixa, assim

$$64\,x \div 16 = 4\,x.$$

E assim como de 64 maçãs, distribuidas em grupos de 4 maçãs, formamos 16 grupos, assim

$$64\,x \div 4\,x = 16.$$

Entremos agora a considerar a somma e a subtracção de expressões envolvidas por parenthesis, que encontraremos a toda hora em algebra. Apresentaremos, para esse fim, quatro pequenos raciocinios, segundo faz Wentworth;

1) "Se um homem tem 10 dollars, depois recebe 3 dollars, e ainda depois mais 2 dollars, tanto lhe faz juntar 3 dollars aos 10 que possuia, e depois 2 aos 13, como reunir os 3 com os 2 e juntar a somma aos 10.

'O primeiro processo será representado por $10 + 3 + 2$; e o segundo por $10 + (3 + 2)$

e portanto $10 + (3 + 2) = 10 + 3 + 2$".

2) "Um homem tem 10 dollars e recebe mais 3; destes 3, porém, paga immediatamente 2. Tanto lhe faz juntar os 3 aos 10 e da somma retirar 2, como dos 3 retirar 2 e juntar o que sobrar.

"Portanto

$$10 + (3 - 2) = 10 + 3 - 2.$$

3) "Um homem tem 10 dollars, e duas dividas, sendo uma de 3 dollars e outra de 2. Tanto lhe faz tirar dos 10 dollars os 3 dollars da primeira divida, e do que restar tirar novamente 2, como sommar as duas dividas e tirar logo a somma.

"Portanto

$$10-(3+2)=10-3-2.$$

4) "Um homem tem 10 dollars em 2 notas de 5 dollars, e precisa fazer um pagamento de 3 dollars. Toma uma das notas de 5 dollars, que dá ao credor, recebendo de troco 2 dollars.

"De quanto foi o pagamento? De $5-2$.

"Com quanto ficou o homem? Com $10-(5-2)$, isto é, com a differença entre o que possuia e o que pagou.

"Mas o que se deu realmente, foi o seguinte: dos 10 dollars, o homem tirou 5, e ao resto juntou os 2 que recebeu de troco. Portanto

$$10-(5-2)=10-5+2.$$

Dados estes quatro exemplos facilimos, está o alumno habilitado a induzir o modo pelo qual se procede. Não será necessario decorar e reproduzir uma lei, ou uma regra pratica. O que será preciso é multiplicar os exercicios, como

$$\begin{array}{ll} 9+(3+2) & 9-(3-2) \\ 9+(2+2) & (8-6)-1 \\ 9-(3+2) & (8-5)-(4-3), \text{ etc.} \end{array}$$

que podem ser generalizados:

$$\begin{array}{ll} 4+(x+1) & x+(2x+1) \\ 4+(x-1) & x+(2x-1) \\ 4-(x+1) & 3x-(2x+1) \\ 4-(x-1) & 2x-(2x-1) \end{array}$$

e assim por deante.

Depois de bem exercitados os discipulos com estas expressões, que nós sabemos, mas elles não precisam de saber que são *binomios*, dar-lhes-emos exercicios com *trinomios*, que facilmente serão reduzidos ao caso anterior:

$$\begin{array}{c} 5x+(2x+3-2) \\ 7x-(10-2x-5) \end{array}$$

e assim por deante.

Mais um passo para a multiplicação de um numero por uma expressão. Seja, por exemplo,

$$(5+3)\times 4 \quad \text{ou} \quad 4(5+3).$$

Trata-se de repetir quatro vezes a parcella $(5+3)$, repetição que representaremos graphicamente por meio de bolinhas. (*)

Vê-se claramente que

$$4(5+3)=(4\times 5)+(4\times 3)=20+12=32.$$

Seja agora

$$(8-3)\times 4 \quad \text{ou} \quad 4(8-3).$$

Trata-se de repetir 4 vezes a parcella 8, desfalcada de 3 unidades, o que representaremos ainda graphicamente. (*)

(*) Veja-se o texto do compendio.

Vê-se claramente que

$$4(8-3)=(4\times 8)-(4\times 3)=32-12=20.$$

Façamos, pois, numerosos exercicios como os seguintes:

$7(8+5)$ $4(x+1)$ $5(2+x)$ $5(2-x)$
$7(8-5)$ $4(x-1)$ $5(x-1)$ etc.

Caminhemos agora mais um passo. Qualquer alumno das primeiras classes pode respondera isto que vou escrever, e que conheceis das cartas de Parker:

$$3+?=7$$
$$9-?=6$$
$$5\times ?=30$$
$$18\div ?=2$$
$$?\div 7=6.$$

Substitúo o ponto de interrogação pelo symbolo x, e as questões não mudam:

$$3+x=7$$
$$9-x=6$$
$$5\times x=30 \quad \text{ou} \quad 5x=30$$
$$18\div x=2 \quad \text{ou} \quad \frac{18}{x}=2$$
$$x\div 7=6 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{7}=6.$$

Pois sempre que um alumno responder a uma destas questões, não terá feito menos do que *resolver uma equação!* Terá resolvido uma equação como Mr. Jourdain fazia prosa, — sem o perceber, mas tão bem quanto o maior dos algebristas.

E' então chegado o momento de apresentarmos aos alumnos um meio extremamente facil para que comprehendam o que é a equação.

Elles conhecem a balança, para que serve, e como com ella se opera.

Supponhamos collocados na concha da esquerda 3 daquelles objectos a que chamámos x. Ha, pois, no prato, $3x$. O peso desses tres objectos é, ainda imaginado, 200 grammas. Se collocarmos na concha do lado direito pesos equivalentes a 200 grammas, o travessão da balança ficará em equilibrio, e este equilibrio será representado pela expressão

$$3x=200.$$

Podemos agora dizer ao alumno, sem definição formal, que esta expressão de equilibrio é uma *equação*; que a parte á esquerda é o *primeiro membro*, e a da direita o *segundo membro*.

Colloquemos no prato da esquerda, além dos 3 objectos que ahi se encontram, um peso de 50 grammas. Que succederá? Descerá o prato, ou haverá desequilibrio. Como corrigir esse desequilibrio? Naturalmente, collocando no prato da direita outro peso de 50 grammas, ou 2 de 25, peso equivalente, emfim. Haverá de novo equilibrio, que representaremos assim:

$$3x+50=200+50.$$

e o discipulo acceitará *que a ambos os membros de uma equação podemos ajuntar a mesma quantidade.*

Retiremos agora este peso de 50 gr. que está no prato da direita. Haverá novamente um desequilibrio, que se corrigirá logo que se retire, do outro prato, peso equivalente, e o discipulo acceitará *que a ambos os membros de uma equação se pode subtrahir a mesma quantidade.*

Admittidos estes principios, um ligeiro raciocinio mostrará *que se podem multiplicar e se podem dividir ambos os membros da equação pela mesma quantidade*.

Estes quatro principios que acabam de ser enunciados são sufficientes para a resolução das operações. Façamol-os comprehender, mas não os demonstremos como fazem os compendios communs de algebra!

Da applicação desses quatro principios resultam algumas consequencias, que serão apreciadas á proporção que tivermos de resolver as equações.

Seja a equação

$$14\,x - 11 = 5\,x + 70. \qquad (a)$$

$14\,x - 11$ é o primeiro membro; $5\,x + 70$ o segundo. Dentro do primeiro membro, $14\,x$ é um termo, 11 é o outro; $5\,x$ e 70 são termos do 2º membro.

Eu posso, se quizer, sommar 11 a ambos os membros da equação (a):

$$14\,x - 11 + 11 = 5\,x + 70 + 11$$

ou

$$14\,x = 5\,x + 70 + 11. \qquad (b)$$

Aqui vemos que o termo 11, que estava para ser subtrahido no primeiro membro, desappareceu deste, apparecendo no segundo para ser sommado.

Isto nos auctoriza a estabelecer que *podemos passar um termo de um membro para outro*, e o modo pelo qual o faremos.

Podemos, pois, agora, passar para o primeiro membro o termo $5\,x$:

$$14\,x - 5\,x = 70 + 11. \qquad (c)$$

Estas duas transferencias, que effectuámos, e que se basearam nos dois primeiros principios, constituem uma *transposição* de termos, transposição que é conveniente sempre que tivermos x nos dois membros da equação.

Desta equação (c) é facil tirar:

$$9\,x = 81 \quad \therefore x = \frac{81}{9} = 9.$$

Seja agora a equação

$$\frac{3\,x}{4} = 21.$$

Aqui temos, *para ser dividido por* 4, aquelle numero que representamos por $3\,x$. Se o quociente da divisão, isto é, a fracção $\frac{3\,x}{4}$ fôr multiplicada por 4, que teremos? Teremos $3\,x \div \times 4$. Ora, dividir e multiplicar, ao mesmo tempo, uma quantidade por um numero não altera essa quantidade, portanto

$$3\,x \div \times 4 = 3\,x.$$

Mas se multiplicarmos por 4 o primeiro membro da equação, precisaremos de multiplicar tambem o segundo, para que não se rompa o equilibrio. Portanto,

$$\frac{3\,x}{4} \times 4 = 21 \times 4$$

ou

$$3\,x = 84$$

$$\therefore x = \frac{84}{3} = 28$$

Seja ainda a equação

$$x+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}=4\frac{5}{6}.$$

que pode ser escripta

$$x+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{29}{6}$$

ou, com o denominador 12, que é o m. m. c. de 3, 4 e 6, $\frac{12x}{12}+\frac{8x}{12}+\frac{9x}{12}=\frac{58}{12}$. Para que desappareçam os denominadores, vamos multiplicar ambos os membros por 12:

ou $$12x+8x+9x=58$$

$$29x=58 \quad \therefore x=\frac{58}{29}=2.$$

Chegamos, finalmente a poder indicar o caminho seguro da resolução de qualquer equação do primeiro grau com uma incognita:

— 1º Veja o alumno se ha denominadores, e trate de os expellir.

— 2º Faça a transposição que for necessaria, para que fiquem em um membro os termos que contêm a incognita, e no outro os termos conhecidos ou independentes.

O resto é obvio, não precisamos dizer.

Asseguro-vos, Snrs. Professores, que raros prazeres intellectuaes se comparam, para as crianças e os adolescentes estudiosos, ao de resolver equações. Por este exercicio lhes vem não só enorme estimulo para o trabalho, mas tambem grande e serena confiança no valor proprio, e esplendida disciplina da intelligencia.

Todas as equações devem ser obtidas no correr da solução de problemas, e não dadas como exercicios meramente abstractos.

Todos os problemas apresentam, geralmente com demasia de palavras, certo numero de relações entre a incognita e as quantidades conhecidas. Apanhada e expressa uma dessas relações, teremos uma equação, que deve resolver o problema. Tornar explicita, clara, essa relação é aquillo a que se chama *pôr o problema em equação*. Regra para pôr o problema em equação? Nenhuma. Basta a pratica de alguns problemas como o seguinte:

"Um negociante comprou um rebanho de carneiros a a tres preços diversos. Pagou $1/_3$ do rebanho á razão de 21 francos a cabeça; $2/_5$ á razão de 19 francos e o resto á razão de 15 francos. Revendeu todo o rebanho por 1674 francos, ganhando $1/_5$ do preço de compra. De quantos carneiros se compunha o rebanho?"

Ninguem conseguirá fazer um raciocinio claro, facil, corrente, para este problema, se resolvido pelo processo ordinario, a que denominam *arithmetico*. Vejamos como o conduziriamos para o emprego da equação, por um processo facil, que parece algebrico:

"O negociante pagou de certa maneira $1/_3$ e de outro modo os $2/_5$. Vamos vêr, como sempre fazem vossos discipulos, que fracção do rebanho foi a terceira parte:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15} \text{ do rebanho,}$$

$$\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15} \text{ do rebanho.}$$

Supponhamos que o negociante comprou x carneiros; a primeira parte, daquellas em que dividiu a compra, foi

$$\frac{1}{3} \text{ de } x, \text{ ou } \frac{x}{3} \text{ carneiros};$$

a segunda parte foi

$$\frac{2}{5} \text{ de } x, \text{ ou } \frac{2x}{5} \text{ carneiros};$$

e a terceira parte foi

$$\frac{4}{15} \text{ de } x, \text{ ou } \frac{4x}{15} \text{ carneiros.}$$

Se comprou a primeira parte á razão de 19 fr. cada crrneiro, pagou

$$21 \times \frac{x}{3}, \text{ ou } 7x \text{ francos};$$

se comprou a segunda á razão de 19 fr. cada carneiro, pagou

$$19 \times \frac{2x}{5}, \text{ ou } \frac{38x}{5} \text{ francos};$$

se comprou a terceira á razão de 15 fr. cada carneiro, pagou

$$15 \times \frac{4x}{15}, \text{ ou } 4x \text{ francos.}$$

Facil nos será agora saber quanto pagou, ao todo o negociante:

$$7x + \frac{38x}{5} + 4x.$$

Diz-nos o problema que o lucro foi de $^1/_5$ do preço de compra, ou

$$\frac{1}{5}\left(7x + \frac{38x}{5} + 4x\right)$$

O negociante vendeu todo o rebanho por 1.674 francos portanto

$$7x + \frac{38x}{5} + 4x + \frac{1}{5}\left(7x + \frac{38x}{5} + 4x\right) = 1674.$$

Resolvida esta equação, que é facilima, acharemos

$x = 75$, numero de cabeças do rebanho.

Não vos quero fatigar ainda mais, offerecendo e resolvendo novos problemas. Experimentae e vereis como tudo isto é facil.

Só depois de regularmente familiarizados os alumnos com o methodo algebrico, é que lhes deveremos dar, como Wentworth, a noção, que é imprescindivel, dos numeros negativos.

Vamos proceder, para isso, de um modo absolutamente pratico e intuitivo.

Todo alumno do 5º anno sabe, e se não sabe pode aprender, o que é uma *conta corrente* em uma casa commercial. Podeis fazer varios exercicios a proposito, figurando creditos e debitos, e calculando saldos.

Se meu credito é, por exemplo,

10 e o meu debito 2, o saldo é

$$10 - 2 = 8.$$

A' proporção que meu debito augmenta, o saldo vae diminuindo

$$\begin{aligned} 10 - 4 &= 6 \\ 10 - 5 &= 5 \\ 10 - 7 &= 3 \\ 10 - 8 &= 2 \\ 10 - 9 &= 1 \\ 10 - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Meu debito pode, porém, ainda augmentar, o que só depende da confiança do negociante. Poderemos então continuar a escrever

$$\begin{aligned} &10 - 12 \\ &10 - 15 \\ &10 - 20, \text{ etc.} \end{aligned}$$

mas desde que meu debito ultrapasse meu credito, eu começo a *dever*. O negociante, que até então, nas suas notas, escrevia a meu respeito,

« Saldo a *seu* favor.... 6, 5, 3, 2, 1, »

passará a escrever

« Saldo a *meu* favor, ou a *nosso* favor.... 2, 5, 10, etc. »

A algebra representa essa differença de sentido pelo signal negativo. Para ella, meu saldo existe sempre, mas é, successivamente:

$$6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, \text{ etc.}$$

O signal *menos* não é, pois, mais, em algebra, apenas um signal de subtracção, mas de mudança de sentido. Fareis com vossos discipulos, exercicios a proposito de numeros negativos, originados das contas-correntes; da marcha, a partir de um ponto, para a direita, ou para a esquerda; da ascensão ou descida da columna de mercurio no thermometro, além e aquém do zero, etc.

Tende, porém, sempre em vista que se trata apenas *de contagem*, como se representa nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} 4 - 7 &= -3 \\ 4 + 2 - 5 &= 1 \\ 14 - 5 - 9 + 1 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5 - x - 3x &= 5 - 4x \\ 12 - 14x - 17x &= 12 - 31x \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

isto é, não vos transvieis ensinando, já, as celebres regras de signaes da multiplicação e da divisão.

Até agora considerámos apenas problemas que se resolvem por meio de uma equação com uma incognita. Alguns existem, porém, em que ha duas incognitas perfeitamente independentes. Para encurtar esta fastidiosa leitura, não vos citarei um, mas apenas as equações resultantes.

Havendo duas incognitas taes, que uma não se possa deduzir da outra, precisaremos de duas equações, que formem um *systema*.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

são duas equações que constituem um systema.

Para resolver um systema de duas equações, eu vos recommendo que escolhaes *um unico* dos varios methodos existentes, e deve ser o da eliminação de uma das incognitas pela reducção ao mesmo coefficiente.

Multipliquemos ambos os membros da segunda equação por 2, e o systema virá:

$$2x - y = 1$$
$$2x + 6y = 22.$$

Vamos agora applicar aquelle principio, que nos foi revelado pela balança, — que a ambos os membros da equação se pode ajuntar e se pode subtrahir a mesma quantidade:

Do segundo membro $(2x + 6y)$ vamos subtrahir $(2x - y)$. Poderemos fazel-o? Sem duvida, desde que do segundo membro (22) subtraiamos a mesma quantidade ou outra equivalente.

Se $(2x - y)$ é equivalente a 1, podemos subtrahir de 22 não $(2x - y)$, mas 1:

$$2x + 6y - (2x - y) = 22 - 1$$

ou

$$2x + 6y - 2x + y = 21$$

ou

$$7y = 21 \quad \therefore \; y = \frac{21}{7} = 3.$$

Achado o valor de y, podemos escrever assim a primeira equação do systema:

$$2x - 3 = 1$$
$$\therefore 2x = 4$$
$$x = 2.$$

Repisemos bem esta operação que acabamos de fazer. Depois de obter que uma das incognitas entre, nas duas equações, com o mesmo coefficiente, subtrahimos uma equação da outra, *membro de membro*; isto é, o primeiro membro de uma do primeiro membro da outra, o segundo

membro de uma do segundo membro da outra, para o fim de fazer desapparecer essa incognita.

Nem sempre, porém, se consegue a eliminação por meio de uma subtracção, ás vezes por meio de uma somma. Este systema, por exemplo,

$$3x - y = 1$$
$$2y - x = 8$$

vem, multiplicada a segunda equação por 3:

$$3x - y = 1$$
$$6y - 3x = 24.$$

Ahi só obteremos a eliminação da incognita x por meio da somma, porque juntando $3x$ com $-3x$ teremos *zero*.

Sommando, pois,

$$5y = 25 \quad \therefore y = 5.$$

Seja ainda o systema

$$3x + 4y = 31$$
$$4x - 3y = 8.$$

Aqui, em vão procuraremos um numero inteiro tal, que, por elle multiplicada uma das equações, venha qualquer das incognitas, nas duas, com o mesmo coefficiente.

Mas o m. m. c. dos coefficientes de x é 12. Se multiplicarmos a primeira equação por 4, teremos o primeiro termo $12x$; se multiplicarmos a segunda por 3, teremos o primeiro termo $12x$. Faz-se, pois, a multiplicação de ambas.

Tendo o alumno chegado aos systemas de 2 equações, extremamente facil será o ensinar-lhe a resolução de um

systema de 3 equações as 3 incognita, de 4 equações a 4 incognitas, etc.

Ahi tendes, Snrs. Professores, o sufficiente para a resolução de quasi todos os problemas difficeis, ou cuja solução é penosa de explicar em palavras.

Não hesito em crêr que achaes, assim, perfeitamente simplificada a tarefa do ensino preliminar, ou introductorio, desta sciencia, tão injustamente tida por difficil.

Não vim fazer propaganda para introducção do methodo algebrico em vossas escolas, mas apenas mostrar-vos que a algebra não é uma dessas disciplinas que bem ou mal se aprendem, e não servem jamais, e que não vos deveis admirar quando a encontrardes, assim reduzida a elementos simplicissimos, nos programmas de ensino. O movimento pedagogico autoriza essa previsão e deveis estar habilitados a receber com sympathia esse treze de maio do raciocinio escravizado a processos anachronicos, inuteis, e, mais que inuteis, prejudiciaes.

Ignoro, quero ignorar, notae bem, se é isso algebra verdadeira, ou arithmetica, ou outra coisa. Não entrou em meu plano nenhuma investigação philosophica ; falei-vos de arithmetica e de algebra no sentido commum destas palavras, naquelle que se encontra referido nos diccionarios de nossa lingua. Esta advertencia, eu vol-a faço porque conheço sufficientemente os preconceitos, o exclusivismo, a irritabilidade dos mathematicos.

Não sei, nem quero saber, se se trata de algebra, ou de arithmetica, ou de outra coisa. Sei que é necessario e que se pode ensinar.

Aqui, para aquelles que me conhecem, devo parecer contradictorio, pois entendo, e sempre o disse, que muito precisamos de reduzir os programmas do ensino primario.

Mas a algebra que eu entendo util e possivel não é uma disciplina a mais, e sim um methodo melhor, mais facil e mais seguro, para se resolverem as questões do curso de arithmetica.

Nem sempre, está visto, nos havemos de valer do processo algebrico. Resolver por elle certos problemas arithmetico, seria, sem duvida, como disse judiciosamente um autor, «empregar uma enorme alavanca para suspender uma penna». Precisa o professor de ser ponderado e parcimonioso, empregando em cada caso os meios mais adequados á intelligencia do discipulo.

Não ha, não pode haver, para a algebra, quer da parte do mestre, quer da do alumno, falta de geito, ou idiosyncrasia. Toleremos ainda que alguem diga — Não dou para o desenho !—, embora saibamos que, ainda preso ao jugo formidavel da natureza, habitante bruto e primitivo das cavernas naturaes, já o nosso antepassado mais remoto desenhava com relativa perfeição, insculpindo fórmas nas pedras, nas conchas e nos ossos dos animaes. Mas o ensino do methodo algebrico, que não exige habilidade especial, nem saber acima do commum, este, todos o podem fazer.

Não será mais necessario possuir-se uma perspicacia particular e notavel para resolver, nas classes adeantadas, os problemas arithmeticos, pois é muito mais facil acompanhar, na mesma ordem, operando sobre um symbolo, as circumstancias referidas nos problemas, do que descobrir, ou por tentativas laboriosas, ou por um acaso feliz, o calcanhar de Achilles de cada problema, a ponta unica e dissimulada, por onde se desmancha a meada. Demais, é já um aphorismo, para a pedagogia contemporanea, que os bons professores não nascem feitos, — fazem-se com o esforço diario.

Eu vos concito, pois, a que estudeis as vantagens da introducção do methodo algebrico em vossas escolas e os meios de fazel-a, porque podemos prevêr com segurança que amanhã ou depois esse methodo será recommendado, ou até imposto, pelas autoridades do ensino, que hão de condemnar ao abandono os processos obsoletos de estafa cerebral por meio da mathematica.

Toda a historia da pedagogia não tem sido outra coisa senão a pesquiza dos meios mais suaves de fazer aprender. Já vae longe (ao menos para nós) o tempo em que se ouvia, nas escolas, a enfadonha e pavorosa cantilena do *Um e um, dois ; dois e dois, quatro,* que já Sto. Agostinho, na sua época, dizia ter odiado em criança. O methodo velho cedeu logar ao ensino racional, e ahi estão, em arithmetica elementar, todas essas utilissimas ninharias, de que tão bem se occupou o meu predecessor nesta tribuna.

Tenho fé absoluta, integral, em vossa aptidão pedagogica, e posso assegurar-vos que não vos arrependereis, se vos dispuzerdes a seguir, neste assumpto, os conselhos, que não são meus, mas das autoridades mais conspicuas do ensino moderno.

Não podereis allegar nem mesmo ignorancia da materia, pois eu vos responderia que de vosso proprio engenho e vosso esforço individual tiraes a maior parte dos conhecimentos que transmittis, e que não vos foram ensinados.

De quanto já pude observar, não me illudo a respeito do elevado nivel intellectual do pessoal docente do Rio de Janeiro, que de nenhum outro é sobrepujado. Tende, pois, em vossa efficiencia pedagogica a mesma confiança que eu nella deposito».

☞ *Formando o livro um todo indivisivel, sendo a materia ensinada gradativamente e intuitivamente, devem ser feitos* TODOS *os exercicios e* TODO *o texto ha de ser lido e entendido.*

INTRODUCÇÃO

Para habituar o alumno á idéa de representar por meio de letras os objectos ou, em geral, as quantidades, e os numeros, acreditamos util uma introducção, regularmente amena e bem simples, conforme suggerir a pratica do proprio professor.

E' preciso, e essencial, que não se comece por dar uma série de definições, com que tantos livros logo ás primeiros paginas espantam, apavoram e opprimem a seus indefesos leitores, mas, ao contrario, ir contornando as difficuldades e supprimindo as asperezas.

Eis como nos parece possivel, por uma breve historieta, introduzir o discipulo elementar nos rudimentos da generalização algebrica :

Procedia um menino, certa vez, por determinação paterna, ao inventario do que se continha

em uma grande arca, cheia de miudezas. Os objectos que ia retirando eram os mais diversos que seja possivel imaginar: alternavam os grampos com os livros, os cadernos de escrever com as tesouras, as borrachas de escriptorio com as raspadeiras e os canivetes, as moedas com os phosphoros, as velas com as chaves, etc., etc.

Tratou o menino de ir fazendo, antes de tudo, a lista geral de todos os objectos, á proporção que os retirava da arca, e assim foi escrevendo a sua relação:

Grampo, phosphoro, grampo, moeda, vela, vela, chave, grampo, grampo, grampo, raspadeira, moeda, tesoura, livro, livro, tesoura, borracha...

Ao fim de pouco tempo, lembrou-se de que poderia simplificar muito a lista, se escrevesse apenas as iniciaes dos nomes daquelles variados objectos, e passou a escrever, continuando a relação:

c, c, v, t, t, l, b, b, m, c, g, g, g, etc.

Não tardou, porém, que lhe apparecesse uma difficuldade: da arca sahiu, depois de varias coisas um *lapis*, que não podia ser representado pela letra *l*, pois já estava destinada aos *livros*. Como fazer? Adoptou Paulo o alvitre de representar o lapis por *lp* e, semelhantemente, representou por *cv* um canivete, por *lpsr* uma lapiseira, por *lpp* um limpapennas, por *pn* uma penna e por *cd* um caderno.

Feita a lista geral dos objectos que se encontravam na arca, representados por uma inicial ou por duas ou tres letras, achou-se Paulo deante do seguinte:

g, p, g, m, v, v, c, g, g, g, m, r, m, t, l, l, t, b, c, c, v, t, t, l, b, b, m, c, g, g, g, m, t, r, lp, b, c, g, lp, lp, lp, lp, l, p, cv, lpsr, lpsr, lpp, c, g, pn, pn, pn, pn, pn, pn, cd, cd.

Procedendo depois á contagem dos objectos enumerados em sua relação, achou Paulo:

$$g+g+g+g+g+g+g+g+g+g = 10 \text{ grampos ou } 10\,g$$
$$p+p = 2 \text{ phosphoros ou } 2\,p$$
$$m+m+m+m+m = 5 \text{ moedas ou } 5\,m$$

. . . .

$$lp+lp+lp+lp+lp = 5 \text{ lapis ou } 5\,lp$$
$$lpsr+lpsr = 2 \text{ lapiseiras ou } 2\,lpsr$$

. . . .

etc.

Assim, tudo que na arca se continha poude ser representado do seguinte modo:

$$10\,g+2\,p+5\,m+3\,v+6\,c+2\,r+5\,t+4\,l+4\,b+5\,lp+2\,cv+2\,lpsr+1\,lpp+6\,pn+2\,cd.$$

Ahi estão reunidos, ou *sommados*, todos os grampos, todos os phosphoros, todas as moedas, etc., etc. A Paulo não occorreria, porém, sommar os *grampos* com as *moedas*, porque sabe que só se podem sommar quantidades da mesma especie.

Quando se empregam letras para representar os objectos, as quantidades quaesquer, essas representações symbolicas têm o nome de *quantidades algebricas*, ou *quantidades literaes*.

A corrigir:

A pgs. 41, linhas 12/13, onde se lê «em todo triangulo» deve estar «nesse triangulo».

Na linha 17, em vez de «Em todo triangulo» deve ser «Nesse triangulo».

Na linha 26, em vez de 8 é 80.

podemos representar abreviadamente [...] e *Ricardo* por R, a palavra *gato* por g; *lapis* por l, e assim por deante, podemos tambem representar convencionalmente, por meio de letras do alphabeto, a todas as quantidades, a todos os numeros.

A letra x é particularmente usada para representar uma quantidade que não se conhece, um numero desconhecido, uma *incognita*.

EXEMPLOS

1. Si representarmos por x o numero de kilometros que percorremos hoje, e si amanhã percorrermos 7 km., o percurso total dos dois dias será representado por $x + 7$.

2. Uma pessoa tem, actualmente, um numero de annos que representamos por x. Qual será a sua idade dentro de 4 annos? *Resp.* $x + 4$.

3. Quantos annos contava, em 1915, uma pessoa que actualmente (1919) está com x annos? *Resp.* $x - 4$.

CAPITULO I

Emprego da letra x na indicação das operações

1. — Do mesmo modo que, em uma nota, podemos representar abreviadamente *Pedro* por *P*, e *Ricardo* por *R*, a palavra *gato* por *g*; *lapis* por *l*, e assim por deante, podemos tambem representar convencionalmente, por meio de letras do alphabeto, a todas as quantidades, a todos os numeros.

A letra x é particularmente usada para representar uma quantidade que não se conhece, um numero desconhecido, uma *incognita*.

Exemplos

1. Si representarmos por x o numero de kilometros que percorremos hoje, e si amanhã percorrermos 7 km., o percurso total dos dois dias será representado por $x + 7$.

2. Uma pessoa tem, actualmente, um numero de annos que representamos por x. Qual será a sua idade dentro de 4 annos ? *Resp.* $x + 4$.

3. Quantos annos contava, em 1915, uma pessoa que actualmente (1919) está com x annos ? *Resp.* $x - 4$.

4. Uma pessôa possúe x e gasta 9$000. Com quanto fica? *Resp.* $x - 9\$000$.

5. Sendo x a idade actual de uma pessoa, qual será daqui a 10 annos? *Resp.* $x + 10$. Daqui a 3 annos e 6 mezes? *Resp.* $x + 3\,{}^1/_2$.

6. Sendo x a idade actual de uma pessoa, como representar a que contava ha 10 annos? *Resp.* $x - 10$. Ha 6 mezes? *Resp.* $x - {}^1/_2$.

7. Sendo x o numero de mezes de uma criança, qual será a idade da mesma dentro de anno e meio? *Resp.* $x + 18$.

8. Um homem recebe certa quantia x; a seguir recebe mais 13$ e logo após 28$. Com quanto fica? *Resp.* Com $x + 13\$000 + 28\$000$.

9. Uma pessoa, que tem x, gasta primeiro 18$ e logo depois 12$. Com quanto fica? *Resp.* $x - 18\$000 - 12\$000$.

10. Sahi de casa com uma quantia x; recebi 20$000, gastei 2$, recebi mais 7$ e gastei mais 12$. Com quanto fiquei? *Resp.* $x + 20\$000 - 2\$000 + 7\$000 - 12\$000$.

2. — A letra x não representa apenas um numero abstracto, mas sim uma quantidade qualquer. Assim como *l* póde, por abreviatura, indicar a palavra *lapis*, tambem x pode representar um objecto qualquer, cujo nome se ignora.

Admittamos, pois, que ha um certo objecto que se denomina x, do mesmo modo que outros têm os nomes de *lapis*, *penna*, *tinteiro*.

Se possuirmos 1 *lapis* e mais 1 *lapis*, teremos 2 *lapis*; tambem se possuirmos um daquelles objectos denominados x, e mais outro igual, teremos ao todo 2 objectos denominados x, ou $2\,x$ (lê-se *dois xis*).

Poderiamos, pois, escrever

$$1\,x + 1\,x = 2\,x,$$

mas em vez de $1\,x$ escreve-se simplesmente x; portanto

$$x + x = 2\,x$$
$$x + x + x = 3\,x$$
$$x + x + x + x = 4\,x$$
$$x + x + x + x + x = 5\,x.$$

As expressões $2\,x$, $3\,x$, $4\,x$, $5\,x$ são, evidentemente, *numeros concretos*, do mesmo modo que 2 *lapis*, 3 *lapis*, 4 *lapis*, 5 *lapis*.

A primeira dellas, $2\,x$, representa, como se vê, a somma de duas parcellas iguaes a x. Mas sommar duas parcellas iguaes é o mesmo que multiplicar por 2 a parcella, portanto

$$x + x = 2\,x = 2 \times x.$$

Semelhantemente,

$$x + x + x = 3\,x = 3 \times x$$
$$x + x + x + x = 4\,x = 4 \times x$$
$$x + x + x + x + x = 5\,x = 5 \times x.$$

Quando encontrarmos, pois, uma expressão como $3\,x$, $4\,x$, $5\,x$, $20\,x$, $17\,x$, etc. teremos a indicação de um producto. O multiplicador, que geralmente é um numero, tem o nome de *coefficiente*.

Em $2x$ o coefficiente é 2, em $17x$ é 17, em $250x$ é 250. Em x o coefficiente, que então não se escreve, é 1.

3. — Do mesmo modo que 5 *botões* com 2 *botões* perfazem 7 *botões*, podemos assegurar que 5 objectos denominados x, com 2 outros objectos denominados x, perfazem 7 objetos denominados x, ou

$$5x + 2x = 7x.$$

Semelhantemente,

$$5x - 2x = 3x.$$

4. — As expressões $5x + 2x$ e $5x - 2x$ constam de dois elementos cada uma. Esses elementos, separados pelo signal + ou pelo signal —, têm o nome de *termos*: $5x$ é um termo; $2x$ é outro. As expressões algebricas que constam de um unico termo denominam-se *monomios*; as que se compõem de dois termos, *binomios*; as de tres, *trinomios*; as de mais de tres, *polynomios*.

$5x$ é um *monomio*

$5x + 2$ ou $5x + 2$ ou $5x - 2x$ são *binomios*

$4x - 3 + x\ 2x$ é um *trinomio*

$14x + 2x - 8 + 9x - 5x$ é um *polynomio*

EXERCICIO

1. $7x + 2x = ?$ R. $9x$
2. $8x + 3x - 9x = ?$ R. $2x$
3. $9x - 2x = ?$ R. $7x$
4. $7x + x - x = ?$ R. $7x$
5. $x + 2x - 3x = ?$ R. 0
6. $15x - x - x = ?$ R. $13x$
7. $18x - 2x + 2x = ?$ R. $18x$
8. $23x + 5x - 7x = ?$ R. $21x$
9. $12x - 5x - 6x = ?$ R. x
10. $6x - x - 5x = ?$ R. 0
11. $90x - 2x - 15x - 25x = ?$ R. $48x$

5. — Os exercicios acima resolvem-se mentalmente. Mas algumas vezes não se pode assim proceder. Vejamos, então, o que se faz.

Se tivermos:

2 *lapis* + 1 *lapis* + 3 *lapis* + 5 *lapis* + 12 *lapis*,

poderemos escrever:

Lapis : 2 + 1 + 3 + 5 + 12

ou ainda

(2 + 1 + 3 + 5 + 12) *lapis*.

Assim, quando temos

$$7x + 2x,$$

podemos escrever

$$(7 + 2)x;$$

$$8x + 3x - 9x$$

é o mesmo que

$$(8 + 3 - 9)x;$$

$$90\,x - 2\,x - 15\,x - 25\,x$$

o mesmo que

$$(90 - 2 - 15 - 25)\,x;$$

$$9\,x - x$$

o mesmo que

$$(9 - 1)\,x,$$

e assim por deante.

Escrever de tal sorte, utilizando os parentheses, é o que se denomina — *pôr o x em evidencia.*

Exercicio

1. $9x + 4x - 8x + 14x - 7x = ?$ R. $(9 + 4 - 8 + 14 - 7)\,x$, ou $12\,x$
2. $x + 8x - x + 7x + 8x = ?$ R. $(1 + 8 - 1 + 7 + 8)\,x$, ou $23\,x$
3. $7x + 12x - 6x + x - x = ?$ R. $(7 + 12 - 6 + 1 - 1)\,x$, ou $11\,x$
4. $2x - x + x - 2x = ?$ R. $(2 - 1 + 1 - 2)\,x$, ou $0\,x$, ou 0
5. $4x - 5x + 2x = ?$ R. $(4 - 5 + 2)\,x$, ou x.

---

6. — Não é differente o modo de operar quando os coefficientes são fraccionarios.

Se tivermos $\frac{3}{4}$ de uma *laranja* e recebermos $\frac{1}{5}$ da mesma *laranja*, ficaremos com

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$$

da *laranja*. Assim, quando temos

$$\frac{3}{4} \text{ de } x$$

e mais

$$\frac{1}{5}$$

do mesmo x, temos ao todo

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$$

do mesmo objecto x.

Exercicio

1. $\frac{3}{5}x + \frac{1}{7}x = ?$ R. $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{7}\right)x$ ou $\frac{26}{35}x$
2. $x + \frac{1}{2}x = ?$ R. $\left(1 + \frac{1}{2}\right)x$ ou $\frac{3}{2}x$
3. $\frac{2}{7}x - \frac{1}{8}x + \frac{4}{5}x = ?$ R. $\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8} + \frac{4}{5}\right)x$ ou $\frac{269}{280}x$
4. $4x + x - \frac{3}{4}x = ?$ R. $\left(4 + 1 - \frac{3}{4}\right)x$ ou $\frac{17}{4}x$
5. $2x - \frac{5}{7}x - x = ?$ R. $\left(2 - \frac{5}{7} - 1\right)x$ ou $\frac{2}{7}x$.

---

7. — As expressões

$$\frac{3}{5}x,\ \frac{1}{7}x,\ \frac{1}{2}x,$$

etc.

tambem podem ser apresentadas sob a forma

$$\frac{3x}{5}, \quad \frac{x}{7}, \quad \frac{x}{2},$$

etc.

Portanto :

$$4x + \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 3x + \frac{5}{7}x$$

é o mesmo que

$$\left(4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3 + \frac{5}{7}\right)x$$

ou

$$\frac{331}{42}x.$$

EXERCICIO

1. $\frac{4x}{5} - \frac{x}{7} + \frac{2x}{9} = ?$ R. $\frac{277x}{315}$
2. $\frac{7x}{9} - \frac{2x}{3} + \frac{x}{11} = ?$ R. $\frac{20x}{99}$
3. $\frac{x}{9} + \frac{x}{7} + \frac{x}{15} = ?$ R. $\frac{101x}{315}$
4. $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} + \frac{3x}{7} = ?$ R. $\frac{197x}{84}$
5. $x + \frac{x}{4} = ?$ R. $\frac{5x}{4}$.

---

8. — Se os termos que possuem x são numeros concretos e os que o não possuem são abstractos, é claro que não poderemos reunir em um só termo a somma de um termo que contém x com outro que não contém. Do mesmo modo que 5 *ovos* não deixarão de ser 5 *ovos* se propuzermos sommar o *numero* 3 ; $5x$ não deixarão de ser $5x$ quando escrevermos, por exemplo,

$$5x + 2.$$

Aqui temos uma bola. Si tomarmos um numero, seja *8*, para exemplo, e o puzermos ao lado desta bola, teremos, naturalmente, *uma bola e um oito* ou *uma bola mais um oito*, mas nem a bola será maior, nem menor, nem haverá mais que uma bola, nem o *8* se alterará. Assim, pois, si a $4x$ nos propuzermos sommar *3*, teremos apenas que fazer a indicação

$$4x + 3;$$

e si nos propuzermos subtrahir 7 de x, teremos sómente que indicar $x - 7$.

Exercicio

1. $4x - 15 + 2x = ?$ R. $6x - 15$
2. $2x + 7 - 3 = ?$ R. $2x + 4$
3. $x + 4x - 2 = ?$ R. $5x - 2$
4. $14x - x + 7 = ?$ R. $13x + 7$
5. $x + 13\$000 + 28\$000 = ?$ R. $x + 41\$000$
6. $x - 18\$000 - 12\$000 = ?$ R. $x - 30\$000$
7. $x + 20\$000 - 2\$000 + 7\$000 - 12\$000 = ?$
   R. $x + 27\$000 - 14\$000$
   ou $x + 13\$000$
8. $2x - x + 3 = ?$ R. $x + 3$
9. $5 - 2x + 8 - 5x = ?$ R. $13 - 7x$
10. $1 + \frac{3x}{5} + \frac{4x}{10} + 8 = ?$ R. $9 + x$

Empregando parentheses :

11. $x + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + 18x = ?$

    R. $\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + 18\right)x$ ou $\frac{189}{10}x$

12. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 4x = ?$

    R. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4\right)x$ ou $\frac{25x}{6}$

13. $4x - x + 1 = ?$

    R. $(4 - 1)x + 1$ ou $3x + 1$

14. $x + \frac{3x}{2} + 5 - 2x = ?$

    R. $\left(1 + \frac{3}{2} - 2\right)x + 5$ ou $\frac{1}{2}x + 5$

    ou ainda $\frac{x}{2} + 5$

15. $1 + 3x - 2x + 8 = ?$

    R. $1 + 8 + (3 - 2)x$ ou $9 + x$.

---

9. — Dado para exercicio o seguinte :

$$4x + 4x + 4x + 4x = ?$$

qualquer alumno, pensando que 4 *ovos*, mais 4 *ovos*, mais 4 *ovos*, mais 4 *ovos*, dão 16 *ovos*, responderá logo que a parcella $4x$ repetida 4 vezes dá $16x$. Mas repetir quatro vezes a parcella $4x$ é multiplical-a por 4. Portanto,

$$4x \times 4 = 16x.$$

Do mesmo modo :

$$3x \times 5 = 15x$$
$$6x \times 2 = 12x$$
$$2x \times 15 = 30x$$

e assim por deante.

E', pois o coefficiente que se multiplica.

Exercicio

1. $4x \times 7 = ?$ R. $28x$
2. $\frac{3x}{4} \times 5 = ?$ R. $\frac{15x}{4}$
3. $\frac{4x}{5} \times 5 = ?$ R. $4x$
4. $\frac{2x}{9} \times 3 = ?$ R. $\frac{2x}{3}$
5. $5x \times \frac{3}{4} = ?$ R. $\frac{15x}{4}$

---

10. — Se possuirmos 24 *lapis* a distribuir por 4 alumnos, tocarão

$$24 \div 4 = 6 \textit{ lapis}$$

a cada um. Se tivermos 24 objectos dos que se denominam x, a dividir em 4 grupos, ficará cada grupo com

$$24 \div 4 = 6$$

objectos denominados x, ou simplesmente $6x$.

O que se divide é, pois, o coefficiente.

Exercicio

1. $15x \div 3 = ?$ R. $5x$
2. $28x \div 4 = ?$ R. $7x$
3. $32x \div 2 = ?$ R. $16x$
4. $15x \div 4 = ?$ R. $\frac{15x}{4}$
5. $22x \div 7 = ?$ R. $\frac{22x}{7}$.

11. — Pode-se apresentar tambem a divisão deste typo:

$$15x \div x = ?$$

Sabemos que o divisor multiplicado pelo quociente reproduz o dividendo; portanto o procurado quociente, multiplicado por x deve reproduzir $15x$. Ora, só ha um numero capaz de o fazer, e é 15, logo

$$15x \div x = 15.$$

Exercicio

1. $15x \div x = ?$ R. 15
2. $\frac{3}{4}x \div x = ?$ R. $\frac{3}{4}$
3. $28x \div x = ?$ R. 28
4. $\frac{5x}{9} \div x = ?$ R. $\frac{5}{9}$
5. $\frac{7x}{9} \div x = ?$ R. $\frac{7}{9}$

12. — Pode ainda apresentar-se a divisão

$$15x \div 3x = ?$$

Raciocinando como acima, é preciso achar um numero que, multiplicado por $3x$, dê $15x$. Só existe um numero capaz de fazel-o, e é 5:

$$15x \div 3x = 5.$$

O que se divide são, pois, os coefficientes: Isto tambem se pode ver do seguinte modo;

$$15x \div 3x$$

é o mesmo que

$$\frac{15x}{3x}$$

ou

$$\frac{15 \times x}{3 \times x}$$

e ahi, cancellado o factor x, a fracção se reduz a

$$\frac{15}{3}$$

e finalmente a 5.

EXERCICIO

1	$14x \div 2x = ?$	R. 7
2.	$24x \div 4x = ?$	R. 6
3.	$\frac{21x}{7x} = ?$	R. 3
4.	$\frac{48x}{6x} = ?$	R. 8
5.	$\frac{28x}{4x} = ?$	R. 7
6.	$25x \div 4x = ?$	R. $\frac{25}{4}$
7.	$\frac{37x}{8x} = ?$	R. $\frac{37}{8}$
8.	$4x \div 7x = ?$	R. $\frac{4}{7}$
9.	$2x \div 9x = ?$	R. $\frac{2}{9}$
10.	$x \div 15x = ?$	R. $\frac{1}{15}$

---

13. — Do que se vê em os n. 10, 11 e 12, se conclue que : desde que apparece no dividendo a letra *x*, ha de apparecer em um dos termos da divisão (divisor ou quociente), *mas apenas em um delles.*

CAPITULO II

Parentheses

14. — Para lidar com os binomios, trinomios e polynomios devemos envolvel-os ou suppol-os envolvidos em *parentheses*. Apresentam-se então tres casos :

1º O parenthesis é precedido do signal +, ou não tem signal claro, e entende-se então tambem precedido de + ;

2º E' precedido do signal — ;

3º Envolve uma expressão a ser multiplicada.

Vejamos como se procede em cada caso, quando se tratar de binomios, e depois quando se tratar de trinomios e polynomios.

***15.*— Binomios precedidos de mais.**—*Um homem que possuia 4 lapis adquiriu depois em uma loja mais 2, e em outra mais 3 lapis. Com quantos ficou?*

E' indifferente juntar aos 4 primitivos os 2 e á somma reunir os 3, ou juntar separadamente os

2 com os 3 e addicionar a somma aos 4 primitivos. O segundo processo é indicado com o auxilio do parenthesis:

$$4+(2+3)=4+3+2=9$$

Um homem possuia 10 lapis; recebeu mais 4 e deu 2. Com quantos ficou?

E' indifferente: ou juntar aos 10 primitivos os 4 e da somma retirar os 3, ou retirar dos 4 os 3 e juntar aos 10 primitivos o resto. O segundo processo é indicado com o auxilio do parenthesis:

$$10+(4-3)=10+4-3=11$$

Pode-se, pois, estabelecer que: — *se um binomio envolvido por um parenthesis é precedido do signal* $+$, *o parenthesis pode ser removido sem nenhuma alteração.*

EXERCICIO

1. $5+(4+7)=?$ R. 16
2. $12+(7-3)=?$ R. 16
3. $6+(15+4)=?$ R. 25
4. $1+(1+3)=?$ R. 5
5. $7+(4-4)=?$ R. 7
6. $2+(8-7)=?$ R. 3

Do mesmo modo:

7. $(4+3)+2=?$ R. 9
8. $(4-3)+2=?$ R. 3
9. $(4+2)-3=?$ R. 3
10. $(4-2)-2=?$ R. 0
11. $(4+3)+(7+5)=?$ R. 19
12. $(2+8)+(9-4)=?$ R. 15
13. $(9-2)+(5+3)=?$ R. 15
14. $(10-8)+(11-3)=?$ R. 10

15. $x+(4+x)=?$ R. $2x+4$
16. $2x+(3x+5)=?$ R. $5x+5$
17. $4x+(5x-4x)=?$ R. $5x$
18. $4+(7x-3x)=?$ R. $4+4x$
19. $10+(7x-8)=?$ R. $2+7x$
20. $(3x+2)+7=?$ R. $3x+9$
21. $(2x+3)+7x=?$ R. $9x+3$
22. $(x+2)-x=?$ R. 2
23. $(4+7x)-2x=?$ R. $4+5x$
24. $(x+7x)-8x=?$ R. 0

16. — Binomios precedidos de menos.

— *Um homem tem* 100$000 *e precisa pagar duas contas, uma de* 30$000 *e outra de* 20$000.

E' indifferente que pague os 30$ e a seguir os 20$, ou que reuna as importancias das duas contas e as pague englobadamente. O primeiro processo é indicado por

100$000 — 30$000 — 20$000;

o segundo processo é indicado com o auxilio dos parentheses:

100$000 — (30$000 + 20$000)

100$000 — (30$000 + 20$000) = 100$000 — 30$000—20$000

Um homem tem 10$000 *em duas notas de* 5$, *e precisa pagar* 3$000. *Se der em pagamento uma das notas, pagará demasiado, pois a divida é de* 5$000 — 2$000; *que faz então? Toma uma das*

notas de 5$, dá-a ao credor e deste recebe 2$000 de troco.

Este processo é representado por

$$10\$000 - 5\$000 + 2\$000$$

porque — quando o homem *dá ao credor* a nota de 5$, diminúe de 5$ o seu proprio dinheiro; quando *recebe do credor* o troco, 2$000, augmenta desta quantia o resto de seu proprio dinheiro.

Desde que a divida paga era de 3$000, isto é, de (5$000—2$000), a quantia que ficou foi de

$$10\$000 - (5\$000 - 2\$000)$$

Portanto,

$$10\$000 - (5\$000 - 2\$000) = 10\$000 - 5\$000 + 2\$000$$

17. *— Tambem poderiamos raciocinar do seguinte modo:*

Seja effectuar a subtracção aqui indicada:

$$10 - (5 - 2).$$

Temos de subtrahir de 10 um numero que é 2 unidades *menor* do que 5. Se subtrahirmos 5 teremos

$$10 - 5;$$

mas assim teremos tirado ou subtrahido demasiadamente. Teremos subtrahido com as 5 unidades, 2 unidades que não eram para subtrahir. Como re-

parar esse erro? Se tirámos demasiado, havemos de accrescentar o que tiver sido diminuido a maior, portanto, devemos juntar ou sommar 2 unidades.

Dahi:

$$10 - (5 - 2) = 10 - 5 + 2$$

Póde-se, pois, estabelecer que: *si um binomio envolvido por parenthesis é precedido do signal —, o parenthesis póde ser removido, desde que se troquem os signaes dos termos collocados dentro delle, o signal + por — e o signal — por +.* Entende-se que o signal é +, e portanto se troca tambem por —, quando, no primeiro termo dentro do parenthesis, não está escripto.

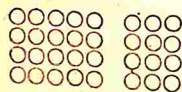
EXERCICIO

$19 - (8 + 3) = ?$	R. 8	$x - (x - 5) = ?$	R. 5
$11 - (7 - 3) = ?$	R. 7	$5x - (2x + 8) = ?$	R. $3x - 8$
$(4 + 3) - (2 + 1) = ?$	R. 4	$7x - (8x - 4x) = ?$	R. $3x$
$(4 + 3) - (5 + 2) = ?$	R. 0	$6x - (4 - 4x) = ?$	R. $10x - 4$
$(10 - 2) - (2 + 3) = ?$	R. 3	$7x - (x + 4) = ?$	R. $6x - 4$
$(9 - 3) - (5 - 2) = ?$	R. 3	$3x + 8 - (4 - x) = ?$	R. $4x + 4$

18. — *Multiplicação de um binomio.* — A expressão 4 (5+3) significa que se deve repetir 4 vezes a somma de 5 com 3. Póde-se representar a parcella por dois grupos de signaes, um contendo cinco e outro contendo 3:

5 3

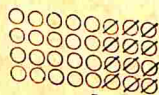
OOOOO OOO

Para exprimir a repetição dos 5+3 signaes, bastar-nos-á repetir quatro vezes uma linha assim constituida de 5+3 bolinhas :

Ha em cada linha (5+3) bolinhas, e 4 linhas ao todo. O numero total de bolinhas dever ser, pois, de $4\times(5+3)$.

No grupo da esquerda vemos 4×5 bolinhas; no da direita 4×3.

Portanto :

$$4(5+3)=(4\times5)+(4\times3)=20+12.$$

19.—Se a expressão fôr 4 (8—3), significará que se quer repetir 4 vezes a differença entre 8 e 3. Póde-se representar do seguinte modo a operação: escreve-se uma linha com 8 bolinhas, das quaes são cortadas as ultimas 3, para mostrar que devem ser subtrahidas ; escreve-se depois uma segunda linha igual, e uma terceira, e ainda uma quarta.

Tendo cada linha (8—3) bolinhas não cortadas, e sendo 4 o numero total de linhas, é claro que deve haver ao todo

$$4\times(8-3)$$

bolinhas não cortadas.

O numero total de bolinhas (cortadas e não cortadas) é (4×8), e o numero total das cortadas é (4×3). O numero total das não cortadas é, portanto,

$$(4\times8)-(4\times3).$$

Vê-se, pois, que

$$4(8-3)=(4\times8)-(4\times3)=$$
$$=32-12.$$

Para multiplicar, pois, um binomio por um numero, devemos multiplicar cada termo do binomio pelo numero, e escrever os productos respectivos com os mesmos signaes que têm esses termos.

Exercicio

1. $4(5+6)=?$ R. $4\times5+4\times6=20+24=44$
2. $3(5-4)=?$ R. $3\times5-3\times4=15-12=3$
3. $7(11-7)=?$ R. $7\times11-7\times7=77-49=28$
4. $6(4+8)=?$ R. $6\times4+6\times8=24+48=72$
5. $3(x+2)=?$ R. $3x+6$
6. $5(2x+4)=?$ R. $10x+20$
7. $8(5+2x)=?$ R $40+16x$
8. $4(4x-x)=?$ R. $16x-4x=12x$
9. [illegible] $(2x-8)=?$ R. $10x-40$
10. 7 ([illegible] $-2x$) = ? R. $42-14x$.

20. — Producto precedido de mais ou de menos. — Supponhamos a seguinte indicação:

$$74+2(5+3).$$

Devemos effectuar a multiplicação e em seguida proceder como nos casos já vistos:

$$74+2(5+3)=74+(2\times5+2\times3)=74+(10+6)=74+10+6.$$

Seja a indicação

$$25-2(4+3).$$

Faremos:

$$25-2(4+3)=25-(2\times4+2\times3)=25-(8+6)=25-8-6.$$

EXERCICIO

1.	$14+5(7+2)=?$	R. 59
2.	$20+7(8-3)=?$	R. 55
3.	$37-3(4+3)=?$	R. 16
4.	$140-5(9-7)=?$	R. 130
4.	$5-4(8-7)=?$	R. 1
6.	$7x+3(x+5)=?$	R. $10x+15$
7.	$x+8(7x-3)=?$	R. $57x-24$
8.	$4x-(4-2)x=?$	R. $2x$
9.	$20x-4(8x-6x)=?$	R. $12x$
10.	$15-4(9x-8x)=?$	R. $15-4x$

21. — Dividir um binomio. — Observado que na multiplicação de 8 pelo binomio (4+5) se faz o producto de 8 por 4 e em seguida o producto de 8 por 5, é facil concluir que para dividir por 8 o binomio (32+40) se deve primeiro dividir 32 e a seguir 40, ligando-se os quocientes pelo mesmo signal +, que liga os termos do dividendo.

Assim,

$$(32+40)\div8=32\div8+40\div8=4+5;$$
$$(76-60)\div4=76\div4-60\div4=19-15.$$

EXERCICIO

1.	$(63-45)\div9=?$	R. $7-5$
2.	$(56x+21)\div7=?$	R. $8x+3$
3.	$\frac{30+42x}{6}=?$	R. $5+7x$
4.	$\frac{54-84x}{6}=?$	R. $9-14x$
5.	$\frac{56x-28x}{7x}=?$	R. $8-4$
6.	$\frac{4x+7}{6x}=?$	R. $\frac{2}{3}+\frac{7}{6x}$.

22. — Trinomios. — *Sahi de casa com 5 moedas; recebi 4, depois 6 e finalmente 11 moedas iguaes.* Posso representar dentro de parenthesis as moedas que recebi:

$$(4+6+11).$$

Uma expressão como esta, de tres termos, é o que se denomina em algebra um *trinomio*.

$$(4+6+11),\ (14-2+3),\ (7+2-4),\ (19-7-2),\ (4-2+x),$$
$$(x+8+2x),\ (14x-8-3)$$

são varios typos de trinonios. Todos elles podem facilmente ser convertidos em binomios. Assim,

$$4+6+11=10+11 \qquad 4-2+x=2+x$$
$$14-2+3=12+3 \qquad x+8+2x=3x+8$$
$$7+2-4=9-4 \qquad 14x-8-3=14x-11$$
$$19-7-2=12-2 \qquad \text{etc., etc.}$$

23. — *Trinomios precedidos do signal mais*. — Supponhamos que se encontra a expressão

$$18+(4+6+11).$$

Sendo $4+6$ o mesmo que 10, póde-se substituir $(4+6+11)$ por $(10+11)$, e vem, applicando-se a regra dos binomios precedidos do signal $+$:

$$18+(4+6+11)=18+(10+11)=18+10+11\ldots$$

mas como o termo 10 está em logar de $4+6$, póde-se substituir, escrevendo, em continuação :

$$\ldots=18+(4+6)+11=18+4+6+11.$$

Seja agora a expressão

$$15+(14-2+3).$$

Sendo $14-2$ o mesmo que 12, póde-se escrever

$$15+(14-2+3)=15+12+3=15+(14-2)+3=15+14-2+3.$$

Do mesmo modo se procederá com qualquer outra expressão trinomia precedida do signal $+$, e da observação se concluirá facilmente que—*para remover o parenthesis que envolve um trinomio, quando precedido do signal* $+$, *escrevem-se com os respectivos signaes, inalterados, os termos do mesmo trinomio.*

EXERCICIO

1. $12+(x+1-3)=?$ R. $10+x$
2. $4+(7-x+8)=?$ R. $19-x$
3. $14x+(2x+12-5)=?$ R. $16x+7$
4. $7x+(14-2+5x)=?$ R. $12x+12$

24. — *Trinomios precedidos do signal menos*. — Supponhamos agora que se encontra a seguinte expressão :

$$44-(4+6+11).$$

Procedendo como acima, isto é, substituindo $4+6$ por 10, applicando a regra relativa aos binomios precedidos do signal $-$ e tornando a substituir,

$$44-(4+6+11)=44-(10+11)=44-10-11=$$
$$=44-(4+6)-11=44-4-6-11.$$

Seja ainda a expressão

$$25-(14-2+3).$$

Do mesmo modo,

$$25-(14-2+3)=25-(12+3)=25-12-3=$$
$$=25-(14-2)-3=25-14+2-3.$$

Póde-se, pois, concluir que—*para remover o parenthesis que envolve um trinomio, quando precedido do signal* $-$, *escrevem-se com os signaes trocados os termos desse trinomio.* Não esquecer que se entende ser $+$ o signal quando, no primeiro termo do trinomio, não está escripto, e portanto tambem se passa a escrever $-$.

Exercicio

1.	$4-(x+2+1)=?$	R. $1-x$
2.	$6-(x-3+2=?$	R. $7-x$
3.	$25-(4-x+2)=?$	R. $19+x$
4.	$4x-(4-5x+2)=?$	R. $9x-6$

25. — *Multiplicação de trinomios.* — Procedendo ainda como acima, chegaremos a estabelecer que—para multiplicar por um numero um trinomio não ha mais do que multiplicar pelo numero cada um dos termos, conservando os productos os mesmos signaes que os referidos termos.

Assim,

$$3(x-2+4)=3x-3\times2+3\times4=3x-6+12.$$

Exercicio

1.	$4(3x+8-2)=?$	R. $12x+24$
2.	$7(2-4x+1=?$	R. $21-28x$
3.	$11(3x-2+x=?$	R. $44x-22$
4.	$5(4x-1-7)=?$	R. $20x-40$

26. — *Producto precedido de mais ou de menos.* — Supponhamos a seguinte indicação:

$$15+3(5+7-4).$$

Procedendo como no caso dos binomios, faremos:

$$15+3(5+7-4)=15+(3\times5+3\times7-3\times4)=$$
$$=15+(15+21-12)=15+15+21-12.$$

Si se tratar da indicação

$$70-4(3+8-6),$$

faremos:

$$70-4(3+8-6)=70(4\times3+4\times8-4\times6)=$$
$$=70-(12+32-24)=70-12-32+24.$$

Exercicio

1.	$15+3(5-2x+8)=?$	R. $54-6x$
2.	$24x-7(8-2x+2)=?$	R. $38x-70$
3.	$7-4(2x-8+3)=?$	R. $27-8x$
4.	$15x+6(4-3+2)x=?$	R. $33x$
5.	$42x-7(3-2+1)x=?$	R. $28x$

27. — *Dividir um trinomio.* — Do mesmo modo que se divide por um monomio um binomio, assim tambem se divide um trinomio, effectuando a divisão de *cada termo*.

Exercicio

1.	$(49-21+28)\div7=?$	R. $7-3+4$
2.	$(50x-75+25x)\div5=?$	R. $10x-15+5x$
3.	$\frac{18x+6-9x}{3}=?$	R. $6x+2-3x$
4.	$\frac{48x+24x-60x}{12x}=?$	R. $4+2-5$
5.	$\frac{15x-23+12}{4}=?$	R. $\frac{15x}{4}-\frac{23}{4}+3$

28. — *Polynomios.* — Observado o que se dá com os binomios e os trinomios, póde-se induzir, e tambem pelo mesmo methodo se póde demons-

trar, que para os polynomios vigoram as mesmas regras, quando se trata de os sommar e subtrahir, e os multiplicar ou dividir por um monomio.

Assim, neste exemplo :

$$(26 - 39x + 65 + 12x - x) \div 13 = ? \quad R.\ 2 - 3x + 5 + \frac{12x}{13} - \frac{x}{13}$$

29. — ***Multiplicar e dividir por um binomio, um trinomio, ou um polynomio.*** — Encontra-se ás vezes a multiplicação ou a divisão de uma expressão algebrica por um binomio, um trinomio, ou um polynomio. O caso é, porém, raro nos problemas mais communs da arithmetica e por isto a questão só será desenvolvida em compendios systematicos de algebra.

CAPITULO III

Equações

30. — Se eu escrever

$$3 + ? = 10,$$

logo se entende que desejo saber — qual o numero que, sommado com 3, dá 10, e mentalmente se responde: 7.

Do mesmo modo, em

$$9 - ? = 5,$$

comprehende-se que pergunto — qual o numero que, tirado de 9, deixa o resto 5, e se responde: 4.

Igualmente,

$4 \times ? = 28$ significa : — por que numero é preciso multiplicar 4, para que dê 28 ? *Resposta* : 7 ;

$? \div 8 = 5$ significa : — qual o numero que, dividido por 8, dá 5 ? *Resposta* : 40 ;

$? - 7 = 11$ significa : — qual o numero que, diminuido de 7, dá 11 de resto ? *Resposta* : 18 ;

$? + 5 = 14$ significa: — qual o numero que, se lhe sommarmos 5, dá 14? *Resposta*: 9;

$18 \div ? = 3$ significa: — por que numero é preciso dividir 18, para que dê o quociente 3? *Resposta*: 6;

$? \times 3 = 27$ significa: — qual o numero que, multiplicado por 3, dá 27? *Resposta*: 9.

Se, em vez do ponto de interrogação, escrevermos x, teremos

$$3 + x = 10 \qquad x - 7 = 11$$
$$9 - x = 5 \qquad x + 5 = 14$$
$$4x = 28 \qquad \frac{18}{x} = 3$$
$$\frac{x}{8} = 5 \qquad 3x = 27.$$

E as respostas serão, respectivamente:

$x = 7$, $x = 4$, $x = 7$, $x = 40$, $x = 18$, $x = 9$, $x = 6$, $x = 9$.

31. — Pois sempre que nos encontrarmos em face de uma expressão como essas, teremos uma *equação* a resolver. Resolver a equação é achar o valor numerico de x. Quando dizemos, em virtude de um rapido raciocinio, no primeiro exemplo, que $x = 7$, temos resolvido a equação $3 + x = 10$.

Em qualquer equação ha sempre dois *membros*. Em

$$x + 5 = 14,$$

por exemplo, $x + 5$ é o *primeiro membro*, e 14 o *segundo membro*. A letra x, que representa a quantidade desconhecida, denomina-se *incógnita*.

Problemas

32. — Toda equação resulta de um *problema*; é a traducção, em linguagem algebrica, da relação que existe entre os *dados* desse problema e a *incógnita*. Resolvida, acha-se o numero que satisfaz a todas as condições do enunciado.

Para resolver um problema pelo methodo algebrico é preciso *pôl-o em equação*, isto é, procurar as relações distinctas que existem entre as quantidades conhecidas e as desconhecidas.

Em um problema ha quasi sempre varias quantidades desconhecidas, mas a observação reduz a muito poucas ás verdadeiras incógnitas. Assim, quando se diz: « *A differença entre dois numeros é* 20, *e sua somma* 46; *quaes são os numeros?* » parece que ha *duas* incógnitas, mas na realidade uma depende da outra; achada uma, logo a outra se descobre; portanto só ha, em verdade, *uma* incógnita. Quando se consegue reduzir todas as relações indicadas em um problema a *uma só* relação entre quantidades conhecidas e uma desconhecida, tem-se *uma equação com uma incógnita*. E' o caso que vamos encarar primeiro, nos problemas seguintes.

Para resolver um destes problemas, representa-se por x a quantidade procurada e indicam-se com essa letra e mais os numeros necessarios, as

mesmas operações indicadas no problema. Faz-se como se, conhecida essa quantidade, se quizesse verificar a exactidão dos dados do problema.

Muitas vezes convém representar por x não — directamente — a quantidade que se procura, mas uma outra, de que aquella depende. E' o caso, por exemplo, dos problemas n.os 16, 17 e 19, paginas 44 e 45.

Só a pratica consegue dar aos discipulos a desejada habilidade para acharem e estabelecerem as relações entre quantidades dadas e incógnitas. Com um exercicio methodico durante algum tempo, será facil desenvolver cada um aquella faculdade, quando não a possuir naturalmente, o que muitas vezes se observa. Neste caso, a resolução dos problemas é uma verdadeira gymnastica mental, de effeitos seguros, de resultado garantido para a funcção geral do raciocinio.

PRIMEIRA SÉRIE DE PROBLEMAS

1. Tenho duas caixas, que contêm lapis. Na segunda ha o quadruplo dos que ha na primeira. Os lapis das duas caixas, reunidos, são 25. Quantos ha em cada uma das caixas?

Representemos por x o numero dos que se conteem na primeira caixa; os da segunda serão $4 \times x$, ou $4x$. Se os da primeira, sommados aos da segunda, dão 25, temos a *equação*

$$x + 4x = 25.$$

Mas $x + 4x$ é o mesmo que $5x$, portanto

$$5x = 25, \text{ donde } x = 5.$$

Resp. Na primeira caixa estão 5 lapis; na segunda, 4×5 ou 20.

2. A somma de dois numeros é 91. O maior é 12 vezes o menor. Achar esses dois numeros.

Representemos por x o menor dos numeros; o maior, que é 12 vezes o menor, será $12 \times x$ ou $12x$. A somma dos dois numeros deve ser representada por $x + 12x$. Portanto, temos a equação

$$x + 12x = 91$$
$$\text{ou} \quad 13x = 91$$
$$\therefore \quad x = 7.$$

O signal $\therefore$ lê-se «*donde*».

Se o numero menor é 7, o maior será 12×7 ou 84.

Realmente:

$$7 + 84 = 91; \quad 84 = 12 \times 7.$$

3. O maior de dois numeros é 4 vezes o menor. A somma dos dois é 60. Quaes são os dois numeros?

Menor x Maior $4 \times x$ ou $4x$.

A equação do problema é

$$x + 4x = 60.$$

Resolvida esta equação, acharemos

$$x \text{ (numero menor)} = 12.$$

Portanto o numero maior, x' (lê-se *xis linha*) $= 4 \times 12 = 48$.

4. *Se ao quintuplo de certo numero juntarmos o triplo do mesmo numero, teremos* 168. *Achar o numero.*

O numero x; seu quintuplo $5x$; seu triplo $3x$.

A equação é

$$5x + 3x = 168$$

e a solução

$$x = 21.$$

5. *Dividir* 56$ *entre A e B, de modo que A receba* 7 *vezes o que recebe B.*

Parte de B x; parte de A $7x$.

A equação é

$$x + 7x = 56000$$

e a solução

$$x = 7000.$$

Resp. A parte de B é 7$000; a de A será $7 \times 7\$000 = 49\$000$.

6. *A, B, e C possuem, juntos,* 96$000. *B possue o dobro de C, e A tem tanto quanto B e C reunidos. Quanto possue cada um?*

Parte de C x
Parte de B $2x$
Parte de A $x + 2x$ ou $3x$.

Os tres reunidos

$$x + 2x + 3x.$$

Equação:

$$x + 2x + 3x = 96000$$
$$\text{ou} \quad 6x = 96000$$
$$\therefore \quad x = 16000.$$

Resp. Parte de $C = 16\$000$; parte de $B = 2 \times 16\$000 = 32\$000$; parte de $A = 32\$000 + 16\$000 = 48\$000$.

Verificação: $16\$000 + 32\$000 + 48\$000 = 96\$000$.

7. *Um homem possuia* 4:195$000. *Depois de gastar certa quantia, achou que estava com o quadruplo do que despendera. Quanto gastou?*

Gastou x; ficou com $4x$; possuia, portanto, ao todo, $x + 4x$. A equação é

$$x + 4x = 4195000$$
$$\text{ou} \quad 5x = 4195000$$
$$\therefore \quad x = 839000.$$

Resp. Gastou 839$000,

8. A somma de tres numeros é 120. O segundo é 5 vezes o primeiro, e o terceiro é 9 vezes o primeiro. Quaes são os numeros?

Primeiro x; segundo $5x$; terceiro $9x$. Somma dos tres 120, portanto

$$x + 5x + 9x = 120$$
$$\text{ou} \quad 15x = 120$$
$$\therefore \quad x = 8.$$

Resp. Um dos numeros é 8, outro 40 e outro 72.

9. A somma de tres numeros é 360. O segundo é 14 vezes o primeiro, e o terceiro é a somma dos outros dois. Achar os numeros.

Primeiro	x
Segundo	$14x$
Terceiro	$x + 14x$ ou $15x$

$$x + 14x + 15x = 360$$
$$\text{ou} \quad 30x = 360$$
$$\therefore \quad x = 12.$$

Resp. Primeiro 12; segundo $14 \times x = 168$; terceiro $12 + 168 = 180$.

Verificação: $12 + 168 + 180 = 360$.

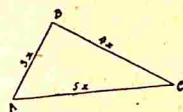
10. Tres homens devem contribuir para formar um capital. O primeiro dará o dobro do

segundo, e o terceiro o dobro do primeiro. Quanto deve fornecer cada um para se formar o capital de 525 dollars?

Parte do segundo	x	Equação	$x + 2x + 4x = 525$
« do primeiro	$2x$	ou	$7x = 525$
« do terceiro	$2 \times 2x$ ou $4x$	$\therefore$	$x = 75$

Resp. Segundo 75; primeiro $2 \times 75 = 150$; terceiro $4 \times 75 = 300$.

Verificação: $75 + 150 + 300 = 525$.

11. O perimetro do triangulo rectangulo C B A é de 240 pollegadas, e sabe-se que em todo triangulo rectangulo os tres lados são respectivamente, os productos de 3, 4, e 5 por um mesmo numero. Achar o comprimento de cada lado.

Em todo triangulo rectangulo, sendo x um certo numero, um lado é $3x$, outro $4x$, e outro $5x$. Portanto, sendo o perimetro 240 pollegadas,

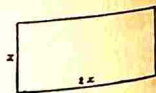
$$3x + 4x + 5x = 240,$$

equação que, resolvida, dá

$$12x = 240$$
$$\therefore \quad x = 20.$$

Resp. Primeiro lado $3 \times 20 = 60$ pollegadas; segundo $4 \times 20 = 80$ poll.; terceiro $5x \times 20 = 100$ poll.

Verificação: $60 + 8 + 100 = 240$.

12. *O perimetro de um rectangulo é de 132 metros. A base é o dobro da altura. Achar as dimensões.*

Altura x Base $2x$

O perimetro do rectangulo é o dobro da somma da base com a altura, pois ha nelle duas bases e duas alturas iguaes. Portanto, o perimetro é

$$2(x+2x)$$

Mas o perimetro é de 132 metros, portanto, teremos a equação do problema se escrevermos :

$$2(x+2x)=132$$
$$\text{ou } 2\times 3x=132$$
$$\text{ou } 6x=132$$
$$\therefore\ x=22$$

Resp. Altura do rectangulo 22 metros ; base $2\times 22=44$ metros.

Verificação : $2\times(22+44)=132$.

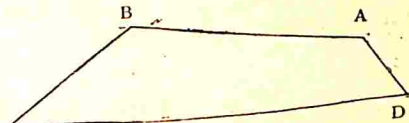
13. *A extensão da cerca que envolve um campo de fórma rectangular é de 320 km. Sendo o comprimento do campo o triplo de sua largura, achar as duas dimensões.*

Largura x comprimento $3x$ perimetro $2(x+3x)$

$$2(x+3x)=320$$
$$\text{ou } 2\times 4x=320$$
$$\text{ou } 8x=320$$
$$\therefore\ x=40.$$

Resp. Largura 40 km. Comprimento $3\times 40=120$ km.

Verificação : $2(40+120)=2\times 160=320$.

14. *O perimetro do quadrilatero A B C D é de 220 pollegadas. O lado B C é o dobro do lado A D ; o lado A B é o triplo do mesmo ; o lado C D é equivalente á somma de B C e A B. Achar o comprimento de cada lado.*

Lado AD x
« BC $2x$
« AB $3x$
« CD $2x+3x$ ou $5x$

Equação

$$x+2x+3x+5x=220$$
$$\text{ou } 11x=220$$
$$\therefore\ x=20.$$

Resp. Lado $AD=20$ poll. ; $BC=2\times 20$ ou 40 poll. ; $AB=3\times 20$ ou 60 polls. ; $CD=5\times 20$ ou 100 polls.

Verificação : $20+40+60+100=220$.

15. *Os angulos $3x$ e $7x$ são complementares ; quanto mede cada um ?*

Angulos complementares são aquelles cuja somma é 90°, portanto

$$3x + 7x = 90$$
$$\text{ou } 10x = 90$$
$$\therefore \quad x = 9.$$

Resp. Os angulos medem $\begin{cases} 3 \times 9 = 27^\circ \\ 7 \times 9 = 63^\circ. \end{cases}$

16. Qual o angulo que é o dobro do proprio complemento ?

Sendo x o complemento, o angulo é $2x$; e como angulos complementares sommados dão 90°,

$$x + 2x = 90$$
$$\text{ou } 3x = 90$$
$$\therefore \quad x = 30.$$

Resp. Portanto, o angulo é de $2 \times 30 = 60^\circ$.

17. Qual o angulo que é o quintuplo do proprio complemento ?

Angulo $5x$
Complemento x.

$$x + 5x = 90$$
$$\text{ou } 6x = 90$$
$$\therefore \quad x = 15.$$

Resp. O angulo é de $5 \times 15 = 75^\circ$.

18. Sendo supplementares os angulos $5x$ e $7x$, quanto mede cada um ?

Angulos supplementares são aquelles que, sommados, dão 180°. Portanto,

$$5x + 7x = 180$$
$$\text{ou } 12x = 180 \quad \therefore \quad x = 15.$$

Resp. Os dois angulos medem, pois, $\begin{cases} 5 \times 15 = 75^\circ \\ 7 \times 15 = 105^\circ \end{cases}$

19. Qual o angulo que é o quadruplo de seu supplemento ?

Supplemento x seu quadruplo $4x$.

$$x + 4x = 180$$
$$\text{ou } 5x = 180$$
$$\therefore \quad x = 36.$$

Resp. O angulo é, pois, $4 \times 36 = 144^\circ$.

20. Um fazendeiro, nos Estados Unidos, pagou $225 por um cavallo e uma vacca. Deu pelo cavallo quatro vezes o que deu pela vacca. Quanto pagou por um e pela outra ?

Seja

$$x = \text{preço da vacca.}$$

Portanto

$$4x = \text{preço do cavallo.}$$
$$x + 4x = 225$$
$$5x = 225$$
$$x = 45.$$

Resp. $45, preço da vacca; $4 \times 45 = \$180$. preço do cavallo.

Verificação : Preço da vacca $45.
Preço do cavallo $45 × 4, ou $180;
Custo de ambos $45 + $180, ou $225.

21. Um fazendeiro tem tres vezes mais carneiros do que vaccas. Possue ao todo 188 cabeças de gado. Quantos carneiros e quantas vaccas ?

Numero de vaccas, x Numero de carneiros, $3x$

Total $x + 3x$

Equação $x + 3x = 188$

$$4x = 188$$
$$x = 47.$$

Resp. 47 vaccas; $47 \times 3 = 141$ carneiros.

Verif. : $47 + 141 = 188$.

22. Em um pomar de 396 arvores ha tres vezes mais pecegueiros e cinco vezes mais macieiras do que cerejeiras. Quantos pecegueiros ha ?

Cerejeiras x
Macieiras $5x$
Pecegueiros $3x$
Pomar $x + 5x + 3x$

Equação $x + 5x + 3x = 396$

$$9x = 396$$

$x = 44$, numero das cerejeiras

Resp. $44 \times 3 = 132$ pecegueiros.

Verif : cerejeiras 44; macieiras $44 \times 5 = 220$; pecegueiros $44 \times 3 = 132$; total 396 arvores.

EXERCICIO

Resolver as seguintes equações, que poderiam ter resultado de problemas diversos :

1. $7x = 35$ — $x = 5$
2. $7x - x = 72$ — $x = 12$
3. $3x + 2x = 60$ — $x = 12$
4. $6x + 2x = 112$ — $x = 14$
5. $4x + 3x = 35$ — $x = 5$
6. $x + 7x = 240$ — $x = 30$
7. $x + 3x = 40$ — $x = 10$
8. $x + 5x = 120$ — $x = 20$
9. $5x - 2x = 18$ — $x = 6$
10. $(1 + 8)x = 450$ — $x = 50$
11. $6x - x = 30$ — $x = 6$
12. $3x - 2x = 180$ — $x = 180$
13. $9x - 2x = 49$ — $x = 7$
14. $x + 3x - 2x = 20$ — $x = 10$
15. $5x - 2x - x = 80$ — $x = 40$
16. $7x - 5x + 6x = 4$ — $x = \frac{1}{2}$
17. $22x + 13x - 6x = 116$ — $x = 4$
18. $3x + 4x = 42$ — $x = 6$
19. $4x + 5x = 108$ — $x = 12$
20. $7x - x = 66$ — $x = 11$
21. $8x + 3x = 99$ — $x = 9$
22. $3x + 7x = 120$ — $x = 12$
23. $11x - 2x = 81$ — $x = 9$
24. $6x + 5x = 99$ — $x = 9$
25. $x + 2x + 3x = 18$ — $x = 3$
26. $3x + 11x + 12x = 130$ — $x = 5$
27. $3x - x + 4x = 24$ — $x = 4$
28. $15x + 8x - 3x = 20$ — $x = 1$
29. $9x - x - 2x = 36$ — $x = 6$
30. $18x - 7x + 9x = 65$ — $x = 3\ 1/4$
31. $7x + 5x - 2x = 80$ — $x = 8$
32. $16x - 3x + 4x = 102$ — $x = 6$
33. $3x + (4x - x) = 90$ — $x = 15$
34. $7x - (9x - 7x) = 40$ — $x = 8$
35. $x + 11x = 75$ — $x = 6\ 1/4$
36. $2x + x = 10$ — $x = 3\ 1/3$
37. $4x - x = 26$ — $x = 8\ 2/3$

Eliminação de Denominadores

33. — Apparecem frequentemente, nos problemas, equações em que os coefficientes de x são numeros fraccionarios. E' preciso fazer desapparecer, ou eliminar, esses denominadores, para resolver as equações. Esta eliminação executa-se facilmente, pelo methodo indicado nos problemas seguintes.

Segunda Série de Problemas

1. Qual o numero que, dividido por 4, dá 16 ?

Numero x

Equação $\frac{x}{4} = 16$ ou $\frac{1}{4} x = 16$

Esta equação resolve-se mentalmente, como vimos a pag. 34, pois mentalmente se obtem o numero procurado, multiplicando 16 por 4:

$$x = 16 \times 4 = 64 .$$

Em verdade, toda fracção traduz uma divisão. Em uma fracção ordinaria, o numerador representa o dividendo, e o denominador o divisor :

$\frac{x}{2} = 63$ é o mesmo que $x \div 2 = 63$.

E como, na divisão, o producto do divisor pelo quociente reproduz o dividendo, podemos fazer desapparecer facilmente os denominadores e portanto a fórma fraccionaria, por uma simples multiplicação.

Assim, a equação

$$\frac{x}{2} = 63$$

póde ser logo resolvida pela multiplicação :

$$x = 63 \times 2$$
ou $x = 126.$

2. Se em logar do numero de laranjas que possuo, possuisse o dobro, e as dividisse por tres pessoas, tocariam 12 *a cada uma. Quantas ha?*

Numero das laranjas x
Dobro $2x$

Equação $\frac{2x}{3} = 12$

$$2x = 12 \times 3$$
$$2x = 36$$
$$x = 18 .$$

Resp. 18 laranjas.

Esta mesma equação poderia ter sido dada sob a fórma

$$\frac{2}{3} x = 12,$$

pois que

$\frac{2}{3} x$ é o mesmo que $\frac{2x}{3}$,

como

$\frac{1}{2} x$ e o mesmo que $\frac{x}{2}$,

$\frac{1}{7} x$ é o mesmo que $\frac{x}{7}$

e assim por deante.

3. A somma de $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{1}{5}$ *de certo numero é 90. Qual é esse numero ?*

Numero x; $\frac{1}{3}$ do numero $\frac{1}{3}x$; $\frac{1}{5}$ do numero $\frac{1}{5}x$.

Equação $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 90$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) x = 90$$

$$\left(\frac{5}{15} + \frac{3}{15}\right) x = 90$$

$$\frac{8}{15} x = 90 \quad \text{ou} \quad \frac{8x}{15} = 90$$

$$8x = 90 \times 15$$
$$8x = 1350$$
$$\therefore \; x = 168\ ^3/_4$$

Resp. O numero é 168 $^3/_4$.

4. Depois de gastar a metade e mais $^1/_{10}$ *de seu dinheiro, um rapaz possue ainda 24 cents. Quanto possuia ?*

Possuia x; gastou $\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x$ ou $\frac{x}{2} + \frac{x}{10}$,

ficou com $x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x\right)$ ou $x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{10}\right)$.

Equação: $x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x\right) = 24$,

ou $x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x = 24$,

ou $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) x = 24$,

ou $\left(\frac{10}{10} - \frac{5}{10} - \frac{1}{10}\right) x = 24$,

ou $\frac{2}{5} x = 24$ ou $\frac{2x}{5} = 24$,

$$2x = 120$$

$\therefore \; x = 60$. *Resp.* 60 cents.

5. Depois de vender $^1/_3$ *de seus carneiros e de comprar mais* $^1/_2$ *do numero que primitivamente possuia, achou-se um fazendeiro com 70 carneiros. Quantos possuia a principio ?*

Possuia x;

vendeu $\frac{1}{3}x$ ou $\frac{x}{3}$; ficou com $x - \frac{1}{3}x$; comprou

mais $\frac{1}{2}x$, ficou com $x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x$.

Equação: $x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = 70$ ou $x - \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 70$

$$\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) x = 70,$$

$$\left(\frac{6}{6} - \frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right) x = 70,$$

$$\frac{7}{6}x = 70 \quad \text{ou} \quad \frac{7x}{6} = 70,$$

$$7x = 420$$

$$\therefore \quad x = 60 \qquad \textit{Resp.} \ \ 60 \text{ carneiros}.$$

Exercicio

1. *Resolver a equação* $x + \frac{x}{2} = 15$.

Devemos observar que x é o mesmo que $1\,x$ e que

$$\frac{x}{2}$$

é o mesmo que

$$\frac{1}{2}x,$$

portanto, póde-se escrever:

$$1\,x + \frac{1}{2}x = 15,$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)x = 15,$$

$$\frac{3}{2}x = 15 \quad \text{ou} \quad \frac{3x}{2} = 15,$$

$$3x = 30,$$

$$\therefore \quad x = 10. \qquad \textit{Resp.}$$

Verificação: $10 + \frac{10}{2} = 10 + 5 = 15.$

2. *Resolver* $x - \frac{x}{4} = 9.$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)x = 9,$$

$$\frac{3}{4}x = 9 \quad \text{ou} \quad \frac{3x}{4} = 9,$$

$$3x = 30,$$

$$\therefore \quad x = 12. \qquad \textit{Resp.}$$

Verificação: $12 - \frac{12}{4} = 12 - 3 = 9.$

3. *Resolver* $2x + \frac{x}{2} = 25.$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)x = 25,$$

$$\frac{5}{2}x = 25,$$

$$5x = 50,$$

$$\therefore \quad x = 10. \qquad \textit{Resp.}$$

4. *Resolver* $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 36.$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x = 36,$$

$$\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)x = 36,$$

$$\frac{3}{4}x = 36,$$

$$3x = 144.$$

$$\therefore \quad x = 48. \qquad \textit{Resp.}$$

Verificação: $\frac{48}{2} + \frac{48}{4} = 24 + 12 = 36.$

5. *Resolver.* $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{9} = 50.$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{9}\right)x = 50$$

$$\left(\frac{18}{36} + \frac{27}{36} - \frac{20}{36}\right)x = 50$$

$$\frac{25}{36}x = 50$$

$$25x = 1800$$

$$\therefore \quad x = 72.$$

Resolver:

6.	$\frac{x}{8} = 20$	$x = 160$	18.	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x = 20$	$x = 32$
7.	$\frac{x}{3} = 14$	$x = 42$	19.	$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 28$	$x = 24$
8.	$\frac{7x}{8} = 24$	$x = 27\ 3/7$	20.	$\frac{5}{6}x - \frac{x}{8} = 68$	$x = 96$
9.	$\frac{7x}{8} = 70$	$x = 80$	21.	$\frac{x}{2} + \frac{1}{5}x = 14$	$x = 20$
10.	$\frac{4}{5}x = 36$	$x = 45$	22.	$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 66$	$x = 36$
11.	$\frac{5x}{8} = 10$	$x = 16$	23.	$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 55$	$x = 30$
12.	$2x - \frac{x}{2} = 30$	$x = 20$	24.	$x + \frac{2x}{3} - \frac{3x}{5} = 32$	$x = 30$
13.	$2x - \frac{x}{4} = 49$	$x = 28$	25.	$3x - \frac{8}{9}x = 57$	$x = 27$
14.	$3x + \frac{x}{2} = 14$	$x = 4$	26.	$\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} = 84$	$x = 224$
15.	$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}x = 20$	$x = 26\ 2/3$	27.	$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{x}{10} = 18$	$x = 30$
16.	$\frac{1}{2}x + \frac{x}{3} = 30$	$x = 36$	28.	$x - \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} = 14$	$x = 15$
17.	$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 45$	$x = 90$	29.	$4x - \frac{5x}{2} + \frac{7x}{8} = 76$	$x = 32$

Transposição

34.—Exceptuadas algumas extremamente faceis, que se resolviam mentalmente, só temos encontrado equações taes, que no primeiro membro dellas se acham os termos que conteem a incógnita, e no segundo os termos conhecidos, ou independentes de x.

Vamos agora occupar-nos de algumas um tanto mais complexas, em que se encontram, quer no primeiro, quer no segundo membro, termos em x e termos conhecidos.

Dada a equação simplicissima

$$x + 4 = 12,$$

que mentalmente se resolve, percebe-se claramente que essa expressão traduz uma somma: x e 4 são as *parcellas*; *12* é a *somma*, ou *todo*.

Ora, na somma

$$7 + 6 = 13,$$

a parcella

$$7 \text{ é } 13 - 6,$$

como

$$6 \text{ é } 13 - 7;$$

em

$$10 + 2 = 12 \begin{cases} 10 = 12 - 2 \\ 2 = 12 - 10, \end{cases}$$

em

$$25 + 9 = 34 \begin{cases} 25 = 34 - 9 \\ 9 = 34 - 25. \end{cases}$$

Em geral, qualquer parcella é a *somma menos a outra parcella.*

Assim, na somma

$$x + 4 = 12$$

uma das parcellas será

$$x = 12 - 4 .$$

Se agora compararmos a equação com esta expressão do valor de x, veremos que do primeiro membro da equação desapareceu o termo 4, que foi apparecer no segundo membro. Mas no primeiro membro era uma quantidade *a sommar*; no segundo appareceu como quantidade *a subtrahir*.

Seja agora a equação

$$x - 4 = 16 .$$

Isto é a expressão de uma subtracção: x é o minuendo, 4 o subtrahendo, 16 o resto, excesso ou differença.

Ora, em

$$15 - 4 = 11$$

o minuendo 15

é o mesmo que $11 - 4$;

em

$22 - 8 = 14$, 22 é o mesmo que $14 + 8$.

Em geral, o minuendo é sempre igual ao *resto mais o subtrahendo.*

Assim, na subtracção

$$x - 4 = 16 ,$$

o minuendo

x vale $16 + 4$ e podemos escrever $x = 16 + 4$.

Se agora compararmos a equação dada com esta expressão do valor de x, veremos que do primeiro membro da equação desappareceu o termo 4, que foi apparecer no segundo membro. Mas no primeiro membro era uma quantidade *a subtrahir*; no segundo appareceu como quantidade *a sommar.*

Dos dois exemplos que acabamos de examinar, podemos concluir que: — para passar de um para outro membro da equação um termo qualquer, basta apagal-o no membro onde se acha, e escrevel-o no outro, porém *com o signal trocado*, **mais** em vez de **menos**, e **menos** em vez de **mais**.

Passar um termo de um membro para outro da equação, respeitado esse principio, é o que se denomina *transpor. Dada uma equação, devemos fazer as transposições necessarias, para que fiquem em um membro os termos em* x *e em outro os termos independentes.*

Exercicio

1. *Resolver a equação* $x + 16 = 35.$

Transpondo, $x = 35 - 16$

$x = 19.$

2. *Resolver* $x - 32 = 70.$

Transpondo, $x = 70 + 32$

$x = 102.$

3. *Resolver* $3x - 18 = 2x$

Transpondo -18 e $2x$, $3x - 2x = 18$

$x = 18.$

4. *Resolver* $3x + 30 = 50 + 2x.$

Transpondo 30 e $2x$, $3x - 2x = 50 - 30$

$x = 20.$

5. *Resolver* $3x - 40 = 10 + 2x.$

Transpondo -40 e $2x$, $3x - 2x = 10 + 40$

$x = 50.$

Resolver :

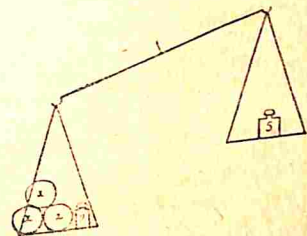
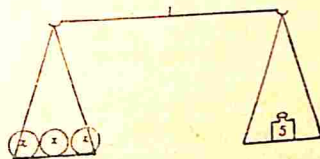
6.	$x + 30 = 50$	$x = 20$	17.	$7x - 20 = 6x + 70$	$x = 90$
7.	$x - 20 = 70$	$x = 90$	18.	$2x + 30 = 80 + x$	$x = 50$
8.	$2x = 50 + x$	$x = 50$	19.	$3x - 40 = 10 + 2x$	$x = 50$
9.	$3x = 50 + 2x$	$x = 50$	20.	$7x - 30 = 6x - 10$	$x = 20$
10.	$2x - 20 = x$	$x = 20$	21.	$2x + 6 - x = 12 - x$	$x = 3$
11.	$2x + 6 = 12$	$x = 3$	22.	$8x + 15 = 3x + 55$	$x = 8$
12.	$8x = 3x + 40$	$x = 8$	23.	$3x - 15 + 4x = 25 - 3x$	$x = 4$
13.	$3x - 15 = 15$	$x = 10$	24.	$9x - 1 - 2x = 6x + 20$	$x = 21$
14.	$7x = 6x + 19$	$x = 19$	25.	$8x - 8 = 40 + 4x - 4$	$x = 11$
15.	$4x - 4 = 40$	$x = 11$	26.	$5x + 50 = 4x + 56$	$x = 6$
16.	$3x + 30 = 50 + 2x$	$x = 20$	27.	$16x - 11 = 7x + 70$	$x = 9$

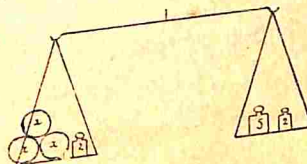
A Balança

35.—As operações relativas á transposição de termos e á eliminação de denominadores serão ainda mais facilmente comprehendidas por meio da *balança*.

Toda equação póde ser, com muita propriedade, comparada a uma *balança em equilibrio*.

Supponhamos collocados em um dos pratos da balança tres daquelles objectos a que convencionámos dar o nome de x. Esses objectos pesam, ao todo, 5 kg. Se collocarmos no outro prato um peso de 5 kg., a balança ficará em equilibrio. Esse equilibrio é traduzido pela equação

$$3x = 5.$$

Se tomarmos agora um peso de 2 kg. e o puzermos ao lado dos $3x$, que succederá ? Haverá forçosamente um des-

equilibrio, pendendo a balança para a esquerda, onde estarão, não mais $3x$, e sim $3x+2$.

Para que a balança volte ao equilibrio, que será preciso? Bastará que ao lado do peso de 5 kg. colloquemos outro de 2 kg. O equilibrio será então traduzido pela equação

$$3x+2=5+2.$$

O equilibrio, pois, continúa, quando a ambos os pratos da balança se juntam pesos iguaes. Assim, não se altera a equação quando a ambos os seus membros se juntam quantidades iguaes.

E' facil comprehender tambem que toda quantidade que fôr retirada de um dos pratos determinará um desequilibrio, pendendo a balança para o lado opposto, e que esse desequilibrio se corrigirá desde que se retire do outro prato a mesma quantidade.

Generalizando, portanto, póde-se estabelecer que: *a ambos os membros de uma fracção é licito sommar a mesma quantidade; de ambos é licito subtrahir a mesma quantidade, sem que a equação se altere.*

36.—Dada, pois, a equação

$$3x=24,$$

podemos escrever

$$3x+8=24+8$$
$$3x-15=24-15$$
$$3x-23=24-23$$
etc.

Consideremos agora a equação

$$4x+30=50.$$

No primeiro membro existe o termo independente 30. Se subtrahirmos 30 a esse primeiro membro, desapparecerá tal termo; mas para que possamos subtrahir 30 do primeiro membro é preciso subtrahir o mesmo do segundo membro. Portanto:

$$4x+30-30=50-30 \quad \text{ou} \quad 4x=50-30.$$

Como se vê, o que se fez foi, realmente, a transposição do termo 30. Dali vem:

$$4x=20$$
$$\therefore \quad x=5.$$

Seja a equação

$$5x+12=4x+18.$$

Subtraiamos de ambos os membros 12:

$$5x=4x+18-12;$$

subtraiamos de ambos os membros $4x$:

$$5x-4x=18-12.$$

Como se vê, houve transposição de $4x$ e de 12. Dahi virá ainda:

$$x=6.$$

A transposição dos termos, com a troca dos respectivos signaes, póde, pois, ser explicada por meio da somma ou da subtracção de quantidades adequadas, a ambos os membros da equação dada.

37.—Supponhamos agora que em um dos pratos da balança está collocado um embrulho, que contém tres objectos x, ou $3x$, cujo peso é de 5 kg. O equilibrio da balança traduz-se pela equação

$$3x = 5.$$

Se ao lado daquelle embrulho collocarmos outro, igual, que contém tambem $3x$, com o mesmo peso, teremos *dobrado* o peso que supporta o prato de esquerda, e a balança soffrerá um desequilibrio.

Como restabelecer o equilibrio? Naturalmente *duplicando* tambem o peso collocado no prato da direita. Se o peso da esquerda se tornar tres vezes maior, será preciso que tres vezes maior se torne o da direita, e assim por deante.

Generalizando, diremos que — *podemos multiplicar pelo mesmo numero ambos os termos de uma equação*. E é claro que se podemos *multiplicar*, podemos tambem *dividir*.

38. — Dada, pois, a equação

$$3x = 5,$$

poderemos escrever, multiplicando ambos os membros por 4:

$$12x = 20;$$

por 6:

$$18x = 30;$$

por 15:

$$45x = 75.$$

e assim por deante.

39.—A multiplicação de ambos os membros da equação serve para eliminar denominadores. Assim, seja a equação

$$\frac{3x}{7} = 12.$$

Se multiplicarmos ambos os membros da equação por 7, teremos:

1º membro

$$\frac{3x}{7} \times 7,$$

que é o mesmo que $3x$;

2º membro

$$12 \times 7.$$

Portanto a equação virá

$$3x = 12 \times 7,$$
$$3x = 84$$
$$\therefore x = 28.$$

Seja agora a equação

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} = 7,$$

Quando houver mais de um denominador, escolhe-se um, multiplo de todos, sendo preferivel o menor multiplo commum. O m. m. c. dos denominadores é, no caso actual, 6. Multipliquemos ambos os membros por 6. Virá:

1^o membro

$$\left(\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\right) \times 6 = \frac{6 \times 2x}{3} + \frac{6 \times x}{2} = 4x + 3x;$$

2^o membro

$$7 \times 6.$$

Equação :

$$4x + 3x = 7 \times 6,$$
$$7x = 42$$
$$\therefore \quad x = 6.$$

A regra pratica é a seguinte: *Procurar o m. m. c. dos denominadores; dividir esse m. m. c. por cada um dos denominadores, e o quociente multiplicar pelo respectivo numerador.* Observar sempre que quando não ha denominador é como se estivesse escripto o denominador 1.

Seja a equação

$$\frac{3x}{7} + \frac{2x}{9} - \frac{x}{18} = 15$$

O m. m. c. dos denominadores é 126;

$(126 \div 7) \times 3x$ dá $54x$,
$(126 \div 9) \times 2x$ dá $28x$,
$(126 \div 18) \times x$ dá $7x$.

A equação póde, pois, ser escripta :

$$54x + 28x - 7x = 1890, \text{ *}$$
$$75x = 1890$$
$$\therefore \quad x = 25\frac{1}{5}.$$

Exercicio

1. *Resolver* $\frac{x}{2} + 6 = \frac{x}{3} + 8.$

Eliminando os denominadores (m. m. c. = 6)

$$3x + 36 = 2x + 48;$$

transpondo

$$3x - 2x = 48 - 36$$

ou

$$x = 12.$$

Verificação : $\frac{12}{2} + 6 = \frac{12}{3} + 8; \quad 6 + 6 = 4 + 8; \quad 12 = 12.$

* Os alumnos esquecem-se frequentemente de multiplicar os termos conhecidos, e isto é causa de erro grave.

2. *Resolver* $x = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 10$.

Eliminados os denominadores

$$12x = 4x + 3x + 120 ;$$

transpondo

$$12x - 4x - 3x = 120$$

ou

$$5x = 120 ,$$

donde

$$x = 24.$$

Verificação : $24 = \frac{24}{3} + \frac{24}{4} + 10 ;\ 24 = 8 + 6 + 10 ;\ 24 = 24.$

3. *Resolver* $\frac{x}{2} + \frac{2x}{5} - 6 = 3$

Eliminando os denominadores

$$5x + 4x - 60 = 30 ;$$

transpondo

$$5x + 4x = 30 + 60$$

ou

$$9x = 90 ,$$

donde

$$x = 10.$$

4. *Resolver* $2x - \frac{13x}{100} = 174 + x$.

Eliminando os denominadores

$$200x - 13x = 17400 + 100x ;$$

transpondo

$$200x - 13x - 100x = 17400 ,$$

ou

$$87x = 17400 ,$$

donde

$$x = 200.$$

Resolver :

5. $\frac{x}{2} + 30 = 50 - \frac{x}{2}$. $\quad x = 20$

6. $\frac{7x}{3} + 6 = 12 + \frac{x}{3}$. $\quad x = 3$

7. $\frac{8x}{5} = \frac{3x}{5} + 8$. $\quad x = 8$

8. $\frac{x}{2} - 3 = \frac{3x}{7} - 2$. $\quad x = 14$

9. $x - 1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 4$. $\quad x = 30$

10. $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - 1 = 4$. $\quad x = 30$

11. $\frac{64}{x} = 16$. $\quad x = 4$

12. $\frac{111}{x} = 37$. $\quad x = 3$

13. $16 = \frac{160}{x}$. $\quad x = 10$

14. $\frac{9 + 3x}{6} = 4$. $\quad x = 5$

15. $\frac{3x - 5}{16} = 1$. $\quad x = 7$

16. $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$. $\quad x = 36$

17. $\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$. $\quad x = 36$

18. $\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8$. $\quad x = 120$

19. $\frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}$. $\quad x = 1$

20. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x - 17$. $\quad x = 60.$

21. *Resolver* $\frac{2x}{3} - 1 = x - 13$.

Eliminando os denominadores

$$2x - 3 = 3x - 39.$$

Se effectuassemos agora a transposição habitual, ficaria

$$2x - 3x = 3 - 39.$$

Mas nem

$$2x - 3x$$

nem

$$3 - 39$$

têm significação, para nós, que por ora não podemos conceber um numero maior subtrahido de um menor. Sempre que a transposição vier a produzir este resultado, devemos passar para o segundo membro os termos que possuem x, e deixar no primeiro os termos conhecidos, tendo o cuidado de escrever em primeiro logar, tanto no primeiro como no segundo membros, os termos que têm signal + (ou sem signal, o que é a mesma coisa):

$$39 - 3 = 3x - 2x,$$

ou

$$36 = x.$$

Dizer, porém,

$$36 = x$$

é o mesmo que dizer

$$x = 36.$$

22. *Resolver* $\frac{19 - 3x}{13} = 1.$

Eliminando o denominador

$$19 - 3x = 13,$$

transpondo

$$19 - 13 = 3x,$$

ou

$$6 = 3x,$$

ou

$$3x = 6,$$

donde

$$x = 2.$$

23. *Resolver* $36 - \frac{4x}{9} = 8$

Eliminando o denominador

$$324 - 4x = 72;$$

transpondo

$$324 - 72 = 4x$$

ou

$$252 = 4x$$

ou

$$4x = 252$$

donde

$$x = 63.$$

24. *Resolver* $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x - 52.$ $x = 240$

25. *Resolver* $14 - x - \frac{x}{2} = 12\ 1/2.$

Escreve-se

$$14 - x - \frac{x}{2} = \frac{25}{2};$$

elimiminando os denominadores

$$28 - 2x - x = 25;$$

transpondo

$$28 - 25 = 2x + x$$

ou

$$3 = 3x$$

ou

$$3x = 3,$$

donde

$$x = 1.$$

26. *Resolver* $2x + 4 = 3x + 1.$

Transpondo

$$4 - 1 = 3x - 2x,$$

ou

$$3 = x$$

ou

$$x = 3.$$

27. *Resolver* $5x + 3 = 7x - 5.$

Transpondo

$$3 + 5 = 7x - 5x,$$

ou

$$8 = 2x,$$

ou

$$2x = 8,$$

donde

$$x = 4.$$

28. *Resolver* $3 - \frac{3x}{4} = 4x - \frac{7}{4}$

Eliminando os denominadores

$$12 - 3x = 16x - 7;$$

transpondo

$$12 + 7 = 16x + 3x,$$

ou

$$19 = 19x,$$

ou

$$19x = 19,$$

donde

$$x = 1.$$

29. *Resolver* $24 - (x + 3) = 12 + 2(9 - 2x).$

Effectuando a multiplicação indicada no 2º membro,

$$24 - (x + 3) = 12 + (18 - 4x).$$

Removendo os parentheses, segundo a regra já vista,

$$24 - x - 3 = 12 + 18 - 4x.$$

Transpondo,

$$4x - x = 12 + 18 - 24 + 3,$$

ou

$$3x = 9,$$

donde

$$x = 3.$$

Verificação: $24 - (3 + 3) = 12 + 2(9 - 2 \times 3)$; $24 - 6 = 12 + 2(9 - 6)$; $18 = 12 + 2 \times 3$; $18 = 12 + 6$; $18 = 18.$

30. *Resolver* $\frac{2x}{3} - \frac{x + 3}{6} = 1.$

Eliminando os denominadores

$$4x - (x + 3) = 6,$$

ou

$$4x - x - 3 = 6;$$

transpondo,

$$4x - x = 6 + 3,$$

ou

$$3x = 9,$$

donde

$$x = 3.$$

31. *Resolver* $\frac{5(x + 14)}{2} = \frac{11x}{3}.$

Removendo o parenthesis,

$$\frac{5x + 70}{2} = \frac{11x}{3};$$

eliminando os denominadores

$$15x + 210 = 22x;$$

transpondo

$$210 = 22x - 15x;$$

ou

$$210 = 7x,$$

ou

$$7x = 210,$$

donde

$$x = 30.$$

Resolver:

32. $\frac{5x}{6} = \frac{3(138 - x)}{4} = 110.$ $x = 78$

33. $\frac{x}{6} + \frac{87 - x}{9} = 12.$ $x = 42$

34. $\frac{x}{6} - \frac{87 - x}{9} = 2.$ $x = 42$

35. $2x + \frac{12-2x}{2} = 12 - x.$ $x = 3$

36. $3x - \frac{30-8x}{2} = 25 - 3x.$ $x = 4$

37. $9x - \frac{3+6x}{3} = \frac{12x+40}{2}.$ $x = 21$

38. $\frac{16x-16}{2} = 40 + \frac{8x-8}{2}.$ $x = 11$

39. $\frac{2x+12}{3} = \frac{5x}{2} - 7.$ $x = 6$

40. $7(x-18) = 3(x-14).$ $x = 21.$

41. $7(x-3) = 9(x+1) - 38.$ $x = 4$

42. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11.$ $x = 6$

43. $\frac{5x-5}{x+1} = 3.$ $x = 4$

44. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2.$ $x = 6$

45. $4(x-3) - 7(x-4) = 6 - x.$ $x = 5$

46. $2x - \frac{19-2x}{2} = 4 - \frac{5x-12}{3}.$ $x = 3$

47. $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14.$ $x = 7$

48. $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1.$ $x = 8$

49. $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2.$ $x = 4$

50. $\frac{2x-5}{3} - \frac{5x-3}{4} + 2 + \frac{2}{3} = 0.$ $x = 3$

51. $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}.$ $x = 3$

52. $\frac{1}{7}(3x-4) + \frac{1}{3}(5x+3) = 43 - 5x.$ $x = 6$

53. $\frac{1}{2}(27-x) = \frac{9}{2} + \frac{1}{10}(7x-54).$ $x = 12$

54. $\frac{1}{6}(8-x) + x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x+6) - \frac{x}{3}.$ $x = 5$

55. $\frac{3x+1}{15} + \frac{2x-5}{3} = \frac{4x-1}{5} + \frac{2-x}{2}.$ $x = 4$

56. $\frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} = 7 - \frac{4+x}{4}.$ $x = 8$

57. $\frac{4x-8}{10} - \frac{20-x}{4} + \frac{x+\frac{1}{2}}{3} = 6\frac{1}{6}.$ $x = 12$

58. $\frac{x}{6} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0.$ $x = \frac{3}{5}$

59. $\frac{7}{24} - \frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3} + \frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$ $x = 30$

60. $\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4\frac{8}{9}.$ $x = 5$

61. $\frac{5x}{3} + 2x + 6\left(x - \frac{x}{3} - \frac{4x}{9}\right) = 450000.$ $x = 90000$

62. $\frac{x-1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5}\right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}.$ $x = 17$

63. $\frac{1}{9}\left[3x - 6 - 5\left(\frac{7x}{2} - 5\right)\right] + 13(x-5) + \frac{1}{4} = 0.$

$x = 5\frac{1}{2}.$

64. *Resolver* $\frac{5x-26}{19} = \frac{x+1}{10}$

Eliminando os denominadores (m. m. c. $= 19 \times 10$):

$$\frac{19 \times 10(5x-26)}{19} = \frac{19 \times 10(x+1)}{10}.$$

Preço do cavallo

$$x.$$

Portanto, preço do carro

$$x + 400.000.$$

Cavallo e carro

$$x + (x + 400.000) = 1.400.000$$
$$x + x + 400.000 = 1.400.000$$
$$2x + 400.000 = 1.400.000$$
$$2x = 1.400\,000 - 400.000$$
$$2x = 1.000.000$$
$$x = 500.000.$$

Resp. 500$000.

2. — A differença entre dois numeros é 20, *e sua somma* 46. *Quaes são os numeros ?*

Um dos numeros (o menor)

$$x.$$

Outro (o maior)

$$x + 20.$$

Somma

$$x + (x + 20) = 46$$
$$x + x + 20 = 46$$
$$2x = 46 - 20$$
$$2x = 26$$
$$x = 13.$$

Resp. Os numeros são : 13 e 13 + 20 ou 33.

3. — Em uma classe de 31 *alumnos, as meninas excedem de* 5 *aos meninos. Quantas meninas ha ?*

Meninas

$$x.$$

Meninos

$$x - 5.$$

Somma

$$x + (x - 5) = 31$$
$$x + x - 5 = 31$$
$$2x = 36$$
$$x = 18.$$

Resp. 18 meninas.

4. — A somma de tres numeros é 50. *O primeiro é o dobro do segundo, e o terceiro excede de* 10 *ao segundo. Quaes são os numeros ?*

Segundo numero

$$x.$$

Primeiro

$$2x.$$

Terceiro

$$x + 10.$$

Somma

$$x + 2x + (x + 10) = 50$$
$$x + 2x + x + 10 = 50$$
$$4x = 40$$
$$x = 10.$$

Resp. Os numeros são: 20, 10 e 20.

5. — A somma de tres numeros é 110. O primeiro dividido pelo segundo dá um quociente de 3, e o terceiro dividido pelo segundo dá um quociente de 1, com um resto de 10. Achar os numeros.

Se x representa o segundo numero, o primeiro é $3x$, e o terceiro é $x + 10$. A somma é, pois, expressa pela equação

$$3x + x + (x + 10) = 110,$$
$$3x + x + x + 10 = 110$$
$$5x = 100$$
$$x = 20.$$

Resp. O segundo numero é 20, o primeiro 60 e o terceiro 30.

Verif. $20 + 60 + 30 = 110$; $60 \div 20 = 3$; $30 \div 20 = 1$ (resto 10.)

6. — O perimetro de um triangulo rectangulo é de 120 pés. A base é $^4/_5$ da hypothenusa, e a altura tem 10 pés menos do que a base. Achar o comprimento de cada lado.

x = comprimento da hypothenusa,

portanto

$$\frac{4x}{5} = \text{comprimento da base,}$$

$$\frac{4x}{5} - 10 = \text{altura;}$$

$$x + \frac{4x}{5} + \left(\frac{4x}{5} - 10\right) = 120$$

$$x + \frac{4x}{5} + \frac{4x}{5} - 10 = 120$$

$$5x + 4x + 4x - 50 = 600$$
$$13 = 650$$
$$x = 50.$$

Resp. Hypothenusa 50 pés; base $\frac{4}{5} \times 50 = 40$ pés; altura $40 - 10 = 30$ pés.

7. — Qual o numero que, dividido por 6, diminúe de 35?

Equação $\frac{x}{6} = x - 35$. Resolvida, $x = 42$.

8. — Qual o numero, cujos $\frac{5}{3}$ o excedem de 228?

Equação $\frac{5x}{3} = x + 228$. Resolvida, $x = 342$.

9. — Dividir o numero 46 em duas partes taes que $^1/_7$ de uma mais $^1/_3$ da outra dêem 10.

Seja x uma das partes, a outra será $46 - x$; a equação do problema será

$$\frac{x}{7} + \frac{46 - x}{3} = 10. \text{ Resolvida, } x = 28.$$

Resp. As duas partes são 28 e $46 - 28$ ou 18.

10. — Qual o numero cujos tres quartos diminuidos de 8, mais a sua propria metade augmentada de 5, dão 122 ?

Equação $\frac{3x}{4} - 8 + \frac{x}{2} + 5 = 122$. Resolvida, $x = 100$.

Resp. 100.

11. — Dividir 100 *francos por tres pessoas, de modo que a primeira tenha 5 fr. mais do que a segunda, e que esta tenha 10 fr. mais do que á terceira.*

Parte da terceira, x; da segunda, $x + 10$; da primeira, $x + 10 + 5$.

Equação $x + (x + 10) + (x + 10 + 5) = 100$. Resolvida, $x = 25$.

Resp. Terceira, 25 fr.; segunda, $25 + 10 = 35$ fr.; primeira, $35 + 5 = 40$ fr.

12. — Dividir 90 *francos por tres pessoas, de modo que a terceira tenha 5 fr. menos que a segunda, e esta 10 fr. mais que a primeira.*

Primeira, x; segunda, $x + 10$; terceira, $x + 10 - 5$ ou $x + 5$.

Equação $x + (x + 10) + (x + 5) = 90$. Resolvida, $x = 25$.

Resp. Primeira, 25 fr.; segunda $25 + 10 = 35$ fr.; terceira, $35 - 5 = 30$ fr.

13. — Tres pessoas têm, reunidas, 100 annos: achar a idade de cada uma, sabendo que a do meio tem mais 10 annos do que a mais nova, e que a mais velha tem a idade das outras duas reunidas.

Seja a idade da do meio,

$$x$$

a da mais nova será

$$x - 10$$

e a da mais velha

$$x + (x - 10).$$

Equação

$$x + (x - 10) + (x + x - 10) = 100$$

ou

$$4x - 20 = 100.$$

Resolvida,

$$x = 30.$$

Resp. A do meio tem 30 annos; a mais nova, $30 - 10 = 20$; a mais velha, $30 + 20 = 50$.

14. — Uma mãe com seus dois filhos têm, reunidos, 60 annos: achar a idade de cada filho, sabendo que o mais velho tem tres vezes a idade de seu irmão, e que a mãe tem o dobro da idade dos filhos.

Seja a idade do mais moço

$$x,$$

a de seu irmão será

$$3x$$

e a de sua mãe

$$2(x + 3x).$$

Equação

$$x + 3x + 2(x + 3x) = 60$$

ou

$$12x = 60,$$

donde

$$x = 5.$$

Resp. Idade do mais moço, 5 annos; do mais velho, 15.

15. — Qual a idade de uma pessoa, se os $\frac{5}{7}$ dessa idade, menos 4 annos, dão a idade que a mesma pessoa tinha ha 12 annos?

Idade actual

$$x;$$

ha 12 annos

$$x - 12.$$

Equação

$$\frac{5x}{7} - 4 = x - 12.$$

Resolvida, $x = 28$.

16. — Dividir 50 hectares em tres campos, de tal sorte que o segundo contenha 8 hectares mais do que o terceiro, e o terceiro 3 hectares mais do que o segundo.

Primeiro,

$$x;$$

segundo,

$$x + 8;$$

terceiro,

$$x + 8 + 3.$$

$$x + (x + 8) + (x + 8 + 3) = 50$$
$$x + x + 8 + x + 8 + 3 = 50$$
$$3x = 50 - 8 - 8 - 3$$
$$3x = 31$$
$$x = 10\frac{1}{3}.$$

Resp. Primeiro $10\,{}^1/_3$ hectares; segundo $10\,{}^1/_3 + 8 = 18\,{}^1/_3$ ha.; terceiro $18\,{}^1/_3 + 3 = 21\,{}^1/_3$ ha.

Verif. $10\,{}^1/_3 + 18\,{}^1/_3 + 21\,{}^1/_3 = 50.$

17. — Achar um numero cujo producto por 5 exceda de tanto a 24, quanto 24 excede a esse proprio numero.

Numero x

24 excede a x de $24 - x$

Equação : $5x = 24 + (24 - x)$

$$5x = 24 + 24 - x$$
$$6x = 48$$
$$x = 8.$$

Verif. $24 - 8 = \mathbf{16}$; $5 \times 8 = 40$, $40 - 24 = \mathbf{16}$.

18. — A somma das edades de A, B e C é de 60 annos. Qual a edade de cada um, se A é 6 annos mais velho do que B e B 6 annos mais velho do que C?

Idade de C	x
« « B	$x + 6$
« « A	$x + 6 + 6$

$$x + (x + 6) + (x + 6 + 6) = 60$$
$$x + x + 6 + x + 6 + 6 = 60$$
$$3x = 60 - 18$$
$$3x = 42$$
$$x = 14.$$

Resp. C tem 14 annos, B $14 + 6 = 20$ annos, A $14 + 6 + 6 = 26$ annos.

Verif. $14 + 20 + 26 = 60$.

19. — Tres quartos do dinheiro de certo rapaz, com mais 900 réis são o mesmo que 6 vezes o dinheiro, menos 1.200 réis. Quanto possúe o rapaz?

Possúe x

$$\frac{3x}{4} + 900 = 6x - 1200$$
$$3x + 3600 = 24x - 4800$$
$$8400 = 21x \text{ ou } 21x = 8400$$
$$x = 400.$$

Resp. 400 réis.

Verif. $^3/_4$ de $400 = 300$, $300 + 900 = 1\$200$,
$6 \times 400 = 2.400$, $2.400 - 1.200 = 1\$200$.

20. — Que numero se deve sommar a ambos os termos da fracção $^{11}/_5$ para que seu valor fique sendo $^5/_3$?

$$\frac{11 + x}{5 + x} = \frac{5}{3}.$$ Resolvido, acha se $x = 4$.

21. — O denominador de certa fracção é 4 vezes o numerador. Se sommarmos 40 a ambos os termos, o valor da fracção torna-se $^3/_4$. Qual é a fracção?

Numerador x; denominador $4x$

$$\frac{x + 40}{4x + 40} = \frac{3}{4}.$$ Resolvida a equação, acha-se $x = 5$

e portanto a fracção é $\frac{5}{5 \times 4}$ ou $\frac{5}{20}$.

22. — O valor de certa fracção é $^1/_3$. Se subtrahirmos 1 a ambos os termos, esse valor passa a ser $^1/_4$. Qual a fracção ?

Se a fracção vale $\frac{1}{3}$, seu denom. é sempre triplo do numer. Portanto,

numerador x; denom. $3x$

$\frac{x-1}{3x-1}=\frac{1}{4}$. Resolvida a equação, $x=\frac{3}{9}$.

23.—A idade actual de A é $^3/_4$ da de B. Ha 40 annos, a idade de A era $^1/_4$ da de B. Qual a idade actual de A ?

Seja

x a idade de A ha 40 annos.

Então, era

$4x$ a idade de B,
$x+40$ é a idade actual de A,
$4x+40$ é a idade actual de B,

$x+40=\frac{3}{4}(4x+40)$. Resolvida a equação, $x=5$, e portanto A tem hoje 45 annos e B 60.

24.— A idade actual de um rapaz é $^3/_8$ da de seu pae; dentro de dez annos será $^1/_2$ della. Qual a idade de cada um ?

Idade actual do pae

x;

do rapaz

$\frac{3x}{8}$;

idade do pae dentro de 10 annos

$x+10$;

do rapaz

$\frac{3x}{8}+10$.

Equação

$$\frac{3x}{8}+10=\frac{1}{2}(x+10).$$

Resolvida, acha-se $x=40$.

Resp. Idade do pae 40 annos; do filho 15.

25.— A differença entre dois numeros é de 20; $^1/_{10}$ do maior vale tanto quanto $^1/_2$ do menor. Quaes são os dois numeros ?

Numeros x e $x-20$.

Equação

$$\frac{x}{10}=\frac{x-20}{2}.$$

Resolvida, $x=25$.

Resp. 25 e 5.

26.— Um criador possue tres vezes mais vaccas do que cavallos. Depois de vender quatro vaccas e quatro cavallos, o numero daquellas fica sendo 4 vezes o destes. Achar os numeros.

Cavallos x; vaccas $3x$.

Depois da venda:

cavallos $x - 4$; vaccas $3x - 4$.

Equação

$$3x - 4 = 4(x - 4).$$

Resolvida, $x = 12$.

Resp. Cavallos 12; vaccas 36.

27. — Um pae tem 24 annos mais do que o filho. Dentro de 20 annos a e dade do filho será $^3/_5$ da do pae. Qual a edade de um e de outro?

Idade actual do filho

$$x;$$

do pae

$$x + 24.$$

Idade do filho dentro de 20 annos

$$x + 20;$$

do pae

$$x + 24 + 20.$$

Equação

$$x + 20 = \frac{3}{5}(x + 24 + 20).$$

Resolvida, $x = 16$.

Resp. Idade do filho 16 annos; do pae 40.

28. — Para saldar uma divida, um fazendeiro offerece um cavallo ou uma junta de bois, sendo avaliados em 820$000 os tres animaes. Se o credor acceitar o cavallo, terá de dar ao fazendeiro 100$; se acceitar os bois, o fazendeiro lhe pagará ainda 80$. Achar o valor dos bois e dos cavallos, e a importancia da divida.

Valor do cavallo

$$x;$$

valor dos bois

$$820.000 - x.$$

Importancia da divida (valor do cavallo diminuido de 100$)

$$x - 100.000.$$

Importancia da divida (valor dos bois, augmentado de 80$)

$$(820.000 - x) + 80.000.$$

Equação

$$x - 100.000 = (820.000 - x) + 80.000.$$

Resolvida, $x = 500.000$.

Resp. Cavallo 500$
Bois 320$
Divida 400$.

29. — Dividir 87 em duas partes taes que a somma dos quocientes obtidos pela divisão de uma dellas por 6 e da outra por 9 seja 12.

Uma das partes

$$x;$$

a outra

$$87 - x;$$

quociente da 1ª por 6

$$\frac{x}{6}.$$

quociente da outra por 9

$$\frac{87 - x}{9}.$$

Equação:

$$\frac{x}{6} + \frac{87 - x}{9} = 12.$$

Resolvida, $x = 42$.

Resp. 42 e 45.

30. — Ha tres numeros consecutivos, cuja somma é 27. Ques são?

x, $x + 1$, $x + 2$ são os numeros;

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 27.$$

Resolvida, $x = 8$.

Resp. 8, 9 e 10.

31. — Um fazendeiro pede 120 dollars por 18 carneiros. O comprador obtem uma reducção equivalente á quantia pela qual lhe ficam, depois do desconto, 2 carneiros. Quanto receberá o fazendeiro por cabeça?

Seja

x = valor recebido por cabeça;

$120 - 2x$ = somma total paga,

$\frac{120 - 2x}{18}$ = somma paga por cabeça.

Portanto,

$$\frac{120 - 2x}{18} = x.$$

Resolvida, $x = 6$.

Resp. 6 dollars.

32. — Um menino recebe 100 réis cada dia que vae ás aulas, mas tem de pagar 250 réis por dia que falta. Ao fim de 100 dias esse menino tem 6$500. Quantos dias faltou?

Faltou

$$x;$$

esteve presente

$$100 - x.$$

Pagou

$$250 \times x \text{ ou } 250\,x;$$

recebeu

$$100\,(100 - x).$$

Ficou com

$$100\,(100 - x) - 250\,x.$$

Equação

$$100\,(100 - x) - 250\,x = 6.500.$$

Resolvida, $x = 10$.

Resp. Faltou 10 dias.

33. — Uma pessoa, dividindo cerejas por algumas crianças, achou que precisaria de mais 20 cerejas para dar 20 a cada criança. Se desse a cada uma 17, teria 4 cerejas de sobra. Quantas crianças havia? Quantas cerejas?

Numero de crianças

$$x.$$

Numero de cerejas

$$20\,x - 20 \text{ ou } 17\,x + 4; \text{ portanto,}$$

Equação

$$20\,x - 20 = 17\,x + 4.$$

Resolvida, $x = 8$.

Resp. 8 crianças e 140 cerejas.

34. — M vendeu $^1/_7$ de seu trigo e N $^1/_5$ do seu. M e N venderam juntos 200 Hl. e ambos possuem, de resto, o mesmo numero de Hl. Quantos Hl. possuia cada um delles?

Seja

$$x = \text{numero de Hl. vendidos por M.}$$

Portanto

$$200 - x = \text{numero de Hl. vendidos por N.}$$

$$7\,x = \text{numero de Hl. que M possuia}$$

$$5\,(200 - x) = \text{numero de Hl. que N possuia.}$$

Equação

$$7\,x - x = 5\,(200 - x) - (200 - x).$$

Resolvida, $x = 80$.

Resp. M 560; N 600 hectolitros.

35. — Vendeu-se $^1/_3$, depois $^1/_4$ e finalmente $^1/_6$ de uma peça de fazenda, de que ainda restam 15 metros; achar o comprimento da peça.

Compr. da peça

$$x.$$

Equação

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 15 = x.$$

Resolvida, $x = 60$.

Resp. 60 metros.

36. — Venderam-se um carro, um cavallo e os arreios por 1:920$; o cavallo vale cinco vezes os arreios, e o carro duas vezes o cavallo: achar os preços respectivos.

Preço dos arreios

$$x;$$

do cavallo

$$5x;$$

do carro

$$2 \times 5x \text{ ou } 10x.$$

Equação

$$x + 5x + 10x = 1.920.000.$$

Resolvida, $x = 120.000$.

Resp. Arreios 120$; cavallo 600$; carro 1:200$.

37.—Em tres dias, um banco recebeu 16:800$; achar a receita diaria, sabido que cada dia se recebeu a quarta parte do que se recebera na vespera.

Primeiro dia

$$x,$$

segundo

$$\frac{x}{4},$$

terceiro

$$\frac{x}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{x}{16}.$$

Equação

$$x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} = 16.800.000.$$

Resolvida, $x = 12.800.000$.

Resp. 1º dia 12:800$, 2º 3:200$, 3º 800$.

38. — Em tres mezes, uma fabrica de armas forneceu 55.900 fuzis: achar a producção mensal, se em cada mez se fabricam $^{17}/_{10}$ do numero de armas do mez anterior.

Primeiro mez

$$x;$$

segundo mez

$$\frac{17x}{10};$$

terceiro mez

$$\frac{17}{10} \times \frac{17x}{10} = \frac{289x}{100}.$$

Equação

$$x + \frac{17x}{10} + \frac{289x}{100} = 55.900.$$

Resolvida, $x = 10.000$.

Resp. 1º mez 10.000 fuzis; 2º 17.000; 3º 28.900.

39. — Cinco pessoas dividiram entre si 8.591 francos: achar a parte de cada uma, sabendo que a segunda recebeu ³/₄ do que recebeu a primeira, a terceira ³/₄ do que recebeu a segunda, e assim por deante.

Primeira

$$x;$$

segunda

$$\frac{3x}{4};$$

terceira

$$\frac{9x}{16};$$

quarta

$$\frac{27x}{64};$$

quinta

$$\frac{81x}{256}.$$

Equação

$$x + \frac{3x}{4} + \frac{9x}{16} + \frac{27x}{64} + \frac{81x}{256} = 8.591.$$

Resolvida, $x = 2.816$.

Resp. Primeira, 2.816 francos; segunda, 2.112; terceira, 1.584: quarta, 1.188; quinta, 891.

40. — Uma pessoa gasta a metade de seu salario em alimentação e um terço em outras despesas; no fim de 40 dias tem poupado 30 fr.: quanto ganha por dia?

Ganha

$$x;$$

gasta

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} \text{ ou } \frac{5x}{6};$$

fica com

$$x - \frac{5x}{6} \text{ ou } \frac{x}{6} \text{ por dia};$$

em 40 dias

$$\frac{40x}{6};$$

Equação

$$\frac{40x}{6} = 30.$$

Resolvida, $x = 4{,}50$.

Resp. 4 fr. 50 por dia.

41. — Decompor 176 em duas partes que estejam entre si na mesma relação em que 5 está para 6.

Quando se diz *relação* em arithmetica ou algebra, diz-se *quociente*. A relação de 5 para 6 é dada pelo quociente $\frac{5}{6}$.

Seja

x uma das partes;

a outra será

$$176 - x;$$

Equação

$$\frac{x}{176 - x} = \frac{5}{6}.$$

Resolvida, $x = 80$.

Resp. Uma das partes é 80; a outra é 96.

42. — Dividir 200 em duas partes taes que dividindo a primeira por 16 e a segunda por 10, a differença dos quocientes seja 6.

Uma das partes

$$x;$$

a outra

$$200 - x.$$

Equação

$$\frac{x}{16} - \frac{200 - x}{10} = 6.$$

Resolvida, $x = 160$.

Resp. As duas partes são 160 e 40.

43. — O quociente de dois numeros é 4 e o resto de sua divisão 60: achar os dois numeros, sabendo mais que sua differença é 495.

Um dos numeros

$$x;$$

o outro

$$x + 495.$$

Sendo o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente, mais o resto, vem:

$$x + 495 = 4 \times x + 60$$
$$435 = 3x,$$
$$x = 145.$$

Resp. Os dois numeros são 145 e 640.

44. — Duas propriedades custaram 33.000 francos; achar o valor de cada uma, sabendo que a terça parte mais a quarta parte do preço da primeira dão 7/10 do preço da segunda.

Preço da primeira

$$x$$

da segunda

$$33.000 - x.$$

Equação

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{7(33.000-x)}{10}.$$

Resolvida, $x=18.000$.

Resp. Preço da primeira, 18.000 francos; da segunda, 15.000 fr.

45. — Achar dois numeros consecutivos taes que sua somma seja igual aos $^2/_3$ do primeiro, augmentados dos $^{117}/_{88}$ do segundo.

Sejam

$$x \text{ e } x+1$$

os dois numeros, e

$$x+x+1 \text{ ou } 2x+1$$

sua somma.

Equação

$$2x+1=\frac{2x}{3}+\frac{117(x+1)}{88}.$$

Resolvida, $x=87$.

Resp. Os numeros são 87 e 88.

46. — Achar um numero que, dividido successivamente por 5 dê 1 de resto; por 6, dê 2 de resto; por 7 dê o resto 5 e cuja somma dos quocientes seja a metade do proprio numero diminuido de 2 unidades.

Seja x o numero. Se, dividido por 5, dá 1 de resto, um numero que seja menor 1 unidade dará divisão exacta. Os tres quocientes podem, pois, ser representados por

$$\frac{x-1}{5},\quad \frac{x-2}{6} \text{ e } \frac{x-5}{7};$$

portanto

$$\frac{x-1}{5}+\frac{x-2}{6}+\frac{x-5}{7}=\frac{x-2}{2}.$$

Resolvida, $x=26$.

Resp. O aumero é 26.

47. — Um pae tem 27 annos, e seu filho 3. Dentro de que tempo será a idade do filho a quarta parte da do pae?

Seja x esse tempo. O pae terá então $27+x$, e o filho $3+x$, e

$$3+x=\frac{27+x}{4}.$$

Resolvida, $x=5$.

Resp. Dentro de 5 annos.

48. — Um pae tem 40 annos, e seu filho 12; ha quantos annos era a idade do pae 5 vezes a do filho?

Ha x annos; então, tinha o pae $40 - x$ e o filho $12 - x$; e havia a equação

$$40 - x = 5(12 - x).$$

Resolvida, $x = 5$.

Resp. Ha 5 annos.

49. — A idade de uma pessoa é o dobro da de outra; ha 7 annos, a somma das idades das duas era igual á idade actual da primeira. Que idades têm as duas?

A mais moça x; a mais velha $2x$; ha 7 annos as idades eram $x - 7$ e $2x - 7$ e portanto

$$(x - 7) + (2x - 7) = 2x.$$

Resolvida, $x = 14$.

Resp. As idades são 14 e 28 annos.

50. — Dizia um pae a seu filho: Hoje, a tua idade é $^1/_5$ da minha; ha cinco annos era $^1/_9$. Que idades temos?

Idade actual do pae

$$x;$$

do filho

$$\frac{x}{5}$$

Ha 5 annos, eram

$$x - 5 \text{ e } \frac{x}{5} - 5$$

e havia a equação

$$\frac{x}{5} - 5 = \frac{x - 5}{9}.$$

Resolvida, $x = 50$.

Resp. Idade do pae, 50 annos; do filho, 10 annos.

51. — Uma mulher leva ao mercado uma cesta de ovos, os quaes quer vender a 70 réis; quebra, porém, 5 em caminho, e verifica, fazendo as contas, que só poderá obter a mesma quantia total, se vender os ovos restantes a 80 réis. Quantos ovos levava?

Levava

$$x;$$

pretendia obter

$$70x \text{ réis};$$

quebrados os 5, ficou com

$$x - 5,$$

os quaes vendeu por

$$80(x - 5),$$

obtendo a mesma quantia; portanto

$$70\,x = 80\,(x - 5).$$

Resolvida esta equação, $x = 40$.

Resp. Levava 40 ovos.

52. — Uma criança nasceu em Novembro, e a 10 de Dezembro tem tantos dias de idade quantos vão de 1º de Novembro ao dia de seu nascimento. Achar a data em que nasceu.

Seja x o numero de dias que ha de 1º de Novembro ao do nascimento. Ha ainda $30 - x$ dias de Novembro. A 10 de Dezembro a criança tem, pois,

$$30 - x + 10 \text{ dias.}$$

Então, porém, ha a equação

$$x = 30 - x + 10 \text{ ou } x = 40 - x.$$

Resolvida, vem $x = 20$.

Resp. A criança nasceu a 20 de Novembro.

53. — Qual o dia do mez de Março, em que a fracção passada do mez é igual á fracção já passada do anno? Considerar-se-á: 1º o anno ordinario, 2º o anno bissexto.

Seja x o numero de dias já passados. A fracção do mez será

$$\frac{x}{31}.$$

Desde o começo do anno, considerado o ordinario, ha

$$31 + 28 + x \text{ dias já passados;}$$

a fracção do anno é, pois,

$$\frac{59 + x}{365}.$$

Temos a equação

$$\frac{x}{31} = \frac{59 + x}{365}.$$

Resolvida, $x = 5\frac{159}{334}$.

Resp. Para o anno ordinario, o facto se dará quando tiverem passado $5\frac{159}{334}$ dias, ou $5^d\ 11^h\ 25^m$, isto é, no dia 6 de Março, ás $11^h\ 25^m$ da manhã.

Considerado o anno bissexto, o numero de dias passados seria

$$31 + 29 + x \text{ ou } 60 + x;$$

a fracção do anno seria

$$\frac{60 - x}{366}.$$

e a equação

$$\frac{x}{31} = \frac{60 + x}{366}.$$

Resolvida, $x = 5\frac{185}{335}$.

Resp. Para o anno bissexto, o facto se daria no dia 6, á $1^h\ 15^m$ da tarde.

54. — Um negociante comprou vinho a 30 fr. o hectol.; vende $^1/_2$ a 35 fr., $^1/_3$ a 29 fr., e o resto a 32 fr. o hectol. Obtem um lucro de 1815 fr.; quantos hectol. comprou?

Comprou x hectol.; vendeu aos dois primeiros preços

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{5}{6} \text{ de } x, \text{ ou } \frac{5x}{6};$$

vendeu a 32 fr. o hectol.

$$x-\frac{5x}{6}=\frac{x}{6}.$$

O preço total de compra foi

$$x \times 30 \text{ ou } 30x;$$

o de venda

$$\left(\frac{x}{2}\times 35\right)+\left(\frac{x}{3}\times 29\right)+\left(\frac{x}{6}\times 32\right)$$

ou

$$\frac{35x}{2}+\frac{29x}{3}+\frac{16x}{3}$$

A equação do problema é

$$\frac{35x}{2}+\frac{29x}{3}+\frac{16x}{3}=30x+1.815.$$

Resslvida, $x=726$.

Resp. Comprou 726 hectolitros.

55. — Um negociante tem 100 litros de vinho de 0 fr. 45 o litro; quantos litros deve addicionar de vinho de 0 fr. 60 o litro, para que o litro da mistura fique por 0 fr. 50?

Seja x o numero de litros a addicionar. A equação será

$$(100+x)\times 0,50=(100\times 0,45)+(x\times 0,60).$$

Resolvida, $x=50$.

Resp. E' preciso addicionar 50 litros do vinho de 0 fr. 60.

56. — Pergunta-se em que porção se deve misturar vinho de 0 fr. 80 o litro a vinho de 0 fr. 50 o litro, para obter vinho de 0 fr. 60 o litro.

Seja x a quantidade de vinho de 0,50 que entrará em 1 litro; teremos a equação

$$0,50\times x+0,80\,(1-x)=0,60.$$

Resolvida, $x=\frac{2}{3}$.

Resp. E' preciso misturar 2/3 de vinho de 0 fr. 50 e $^1/_3$ de 0 fr. 80.

57. — Tomando de emprestimo 900 francos, uma pessoa poderia pagar uma divida de 1.600 francos, ficando com 50 francos. Quanto possuia essa pessoa?

A equação do problema é

$$x + 900 - 1.600 = 50$$

que, resolvida, dá

$$x = 750.$$

Resp. A pessoa possue 750 francos.

58. — Uma propriedade que foi vendida por 89.125 *francos, teria dado de lucro* 5.250 *francos se tivesse sido primitivamente comprada por* 1.875 *francos menos do que o foi. Qual foi o preço de compra ?*

Se tivesse sido comprada por menos 1.875 francos, seu preço teria sido

$$x - 1.875.$$

Então,

$$89.125 - (x - 1.875) = 5.250.$$

Resolvida esta equação, acha-se $x = 85.750$.

Resp. 85.750 francos.

59. — Duas pessoas têm, uma 44 *annos, e a outra* 30. *Quantos annos ha que a idade da primeira era o dobro da da segunda ?*

Ha x annos. Nessa epoca, a 1ª tinha

$$44 - x$$

e a segunda

$$30 - x,$$

e então era a idade da primeira duas vezes a da segunda:

$$44 - x = 2(30 - x).$$

Resolvida esta equação, vem $x = 16$.

Resp. Ha 16 annos.

60. — Uma bola cae de certa altura sobre uma mesa de mormore e ricocheteia, cada vez que toca a mesa, a uma altura igual á terça parte daquella donde cahiu. De que altura cahiu ella primeiro, se depois de tocar 3 *vezes a mesa, percorreu ao todo um comprimento de* 2m,38 ?

Cahiu de uma altura

$$x;$$

ricocheteou a uma altura

$$\frac{x}{3},$$

ornou a cahir da altura

$$\frac{x}{3}$$

e bateu pela segunda vez; ricocheteou a

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{x}{3} \text{ ou } \frac{x}{9};$$

cahiu da altura

$$\frac{x}{9}$$

e bateu pela terceira vez. O caminho total percorrido terá sido de

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{9} = 2{,}38.$$

Resolvida esta equação, vem $x = 1{,}26$.

Resp. A bola cahiu primeiro da altura de $1^m, 26$.

61. — Qual é o numero cuja metade augmentada dos $^4/_5$ *desse mesmo numero, mas diminuida de* $^1/_8$, *excede de* 119 *o valor do numero?*

$$\frac{x}{2} + \frac{4x}{5} - \frac{x}{8} = x + 119.$$

Resolvida esta equação, $x = 680$.

Resp. 680.

62. — Um negociante tem vinho a 1$200 *o litro e junta-lhe agua em tal porção que* 75 *litros da mistura não valham mais do que* 81$000. *Que quantidade dagua haverá em cada litro da mistura?*

Seja x a quantidade d'agua contida em 1 litro da mistura; a quantidade de vinho puro será

$$1 - x.$$

Multiplicando

$$1 - x$$

por 1$200 teremos o valor do litro da mistura. Mas o valor do litro da mistura é

$$\frac{81.000}{75},$$

portanto

$$1.200\,(1 - x) = \frac{81.000}{75}.$$

Resolvida esta equação, $x = \frac{1}{10}$.

Resp. Em cada litro ha $^1/_{10}$ de agua.

63. — Quarenta kg. de agua salgada contêm 3 *kg.* 4 *de sal; que peso de agua pura se deve juntar para que* 40 *kg. da nova mistura contenham apenas* 2 *kg. de sal?*

Seja x o peso da agua a juntar; o peso da mistura será

$$40 + x.$$

Como a quantidade de sal é a mesma, os 3 kg, de sal serão divididos então pelos

$$40 + x \text{ kg. d'agua.}$$

Assim dividido o sal, fica de tal sorte dissolvido, que a cada 40 kg. d'agua cabem apenas 2 kg. de sal. Portanto

$$\frac{3,4}{40+x}=\frac{2}{40}.$$

Resolvida esta equação, $x=28$.

Resp. E' preciso juntar 28 kg. de agua pura.

64. — Um tonnel contem 120 l. de vinho e 180 l. dagua; um segundo tonnel contem 90 l. de vinho e 30 l. dagua; quanto se deve tomar de cada tonnel para fazer uma mistura que contenha 70 l. de vinho e 70 l. dagua?

Seja x o nnmero de litros que se tiram do 1º tonnel; como a mistura tem 140 litros, do 2º tonnel sahirão $140-x$.

Havendo no 1º tonnel 300 litros e sendo 120 de vinho, a proporção do vinho é de

$$\frac{120}{300} \text{ ou } \frac{2}{5}.$$

Havendo no 2º tonnel 120 litros e sendo 90 de vinho; a proporção do vinho é de

$$\frac{90}{120} \text{ ou } \frac{3}{4}.$$

Em x litros do 1º tonnel ha, portanto,

$$\frac{2x}{5}$$

de vinho, e em

$$140-x$$

do segundo ha

$$\frac{3(140-x)}{4}$$

de vinho. E como a mistura deve conter ao todo 70 litros de vinho, temos a equação

$$\frac{2x}{5}+\frac{3(140-x)}{4}=70.$$

Resolvida, $x=100$.

Resp. Devem-se tomar 100 litros do 1º tonnel e 40 do segundo.

65. — P, D e M são tres cidades servidas por uma mesma linha ferrea. Dois trens partem ao mesmo tempo, um de P, outro de D, dirigindo-se ambos a M. O primeiro percorre 60 km. por hora, o segundo 35; a que distancia de D um trem passa o outro, sabendo-se que a distancia entre P e D é de 315 km.?

Seja x a distancia de D ao ponto de encontro; o primeiro terá percorrido, até ahi,

$$315 - x,$$

emquanto o segundo terá percorrido apenas

$$x$$

no mesmo tempo. Os tempos empregados terão sido

$$\frac{315+x}{60} \text{ e } \frac{x}{35},$$

portanto

$$\frac{315+x}{60}=\frac{x}{35}.$$

Resolvido, $x=441$.

Resp. O ponto procurado está a 441 km. de *D*.

66. — *Dois viajantes partem ao mesmo tempo, um de A, outro de B; caminham um ao encontro do outro, percorrendo o primeiro 5 km. por hora, e o segundo 5 ½ km. A que distancia de A se encontrarão, sabendo-se que a distancia de A a B é de 60 km.?*

Seja x essa distancia. Um terá percorrido

$$x$$

e o outro

$$60-x.$$

Dada a egualdade dos tempos, temos a equação

$$\frac{x}{5}=\frac{60-x}{5{,}5}.$$

Resolvida, $x=28\,{}^4/_7$.

Resp. Os viajantes encontram-se a 28 km. ${}^4/_7$ de A.

67. — *Uma pessoa viaja, percorrendo 7 leguas em 5 horas; 8 horas depois, uma outra pessoa parte do mesmo ponto, percorrendo 5 leguas em 3 horas; quantas leguas percorrerá a primeira até ser alcançada pela segunda?*

Seja x o numero de horas que a primeira viaja antes de ser alcançada. A segunda terá percorrido

$$x-8.$$

A 1a percorre em uma hora

$$\frac{7}{5}$$

de legua, e em x horas

$$\frac{7x}{5}.$$

A segunda, que percorre por hora

$$\frac{5}{3}$$

de legua, percorre em

$$x-8$$

horas

$$\frac{5(x-8)}{3}.$$

Mas quando as duas pessoas se encontrarem, terão percorrido a mesma distancia; portanto

$$\frac{7x}{5}=\frac{5(x-8)}{3}.$$

Resolvida esta equação, $x=50$.

Resp. A primeira terá percorrido ${}^7/_5 \times 50=70$ leguas.

68. — Dióphanto passou na infancia 1/6 de sua vida, e na adolencencia 1/12; casou-se e passou nessa união 1/7 de sua vida, mais 5 annos, antes de ter um filho, ao qual sobreviveu 4 annos. Esse filho chegou apenas á metade da idade com que morreu seu pae. Com que idade morreu Dióphanto?

Seja x a idade com que morreu. Passou na infancia

$$\frac{x}{6},$$

na adolescencia

$$\frac{x}{12},$$

e na sua união, antes de lhe nascer o filho,

$$\frac{x}{7}+5.$$

O filho viveu

$$\frac{x}{2}$$

annos; Diophanto viveu-os tambem, e como sobreviveu 4 annos ao filho, sua vida toda pode ser representada por:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\left(\frac{x}{7}+5\right)+\frac{x}{2}+4,$$

e como sua vida toda é x, temos a equação

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Resolvida, $x=84$.

Resp. 84 annos.

69. — As duas rodas deanteiras de um carro têm 2 m, 80 *e as duas trazeiras* 3 m, 60 *de circumferencia; em certo percurso, as primeiras deram* 1000 *voltas mais do que as outras. Achar esse percurso.*

Reduzamos tudo a decimetros. Seja x decimetros o percurso. As rodas deram, respectivamente, nesse trajecto,

$$\frac{x}{28} \text{ e } \frac{x}{36}.$$

voltas, e dahi a equação

$$\frac{x}{28}-\frac{x}{36}=1\,000.$$

Resolvida, $x=126.000$.

Resp. 126.000 dm. ou 12 km. 600.

70. — Um capitalista emprega a sua fortuna a 4 % *durante* 3 *annos; gasta então* 1/5 *do capital e emprega os* 4/5 *restantes a* 5 % *durante* 9 *mezes; depois, gasta* 1/4 *do capital empregado e emprega durante* 4 *mezes, a* 3 %, *o que lhe resta. O total dos juros assim recebidos foi de* 9360 *francos. Qual o capital primitivo?*

Seja x esse capital. Seu juro a 4 % durante 3 annos é de

$$\frac{4 \times x \times 3}{100} \text{ ou } \frac{12\,x}{100}.$$

O juro de

$$\frac{4\,x}{5}$$

a 5 % durante 9 mezes é de

$$\frac{\frac{4\,x}{5} \times 5 \times 9}{100 \times 12} \text{ ou } \frac{3\,x}{100}.$$

O juro de

$$\frac{3}{4} \times \frac{4\,x}{5} \text{ ou } \frac{3\,x}{5}$$

a 3 % durante 4 mezes é de

$$\frac{\frac{3\,x}{5} \times 3 \times 4}{100 \times 12} \text{ ou } \frac{3\,x}{500}.$$

Temos, portanto, a equação

$$\frac{12\,x}{100} + \frac{3\,x}{100} + \frac{3\,x}{500} = 9.360.$$

Resolvida, $x = 60.000$.

Resp. 60.000 francos.

71. — Qual o capital que, empregado a 4,5 % durante 7 mezes e 9 dias, e a seguir a 5,4 % durante 1 anno 5 mezes e 12 dias, produziu ao todo um juro de 126$810?

Seja x esse capital. Seu juro a 4,5 % durante 7m. 9d. ou 219 d. é de

$$\frac{4{,}5 \times x \times 219}{36.000},$$

e a 5,4 % durante 1a. 5m. 12d. ou 522 d. é de

$$\frac{5{,}4 \times x \times 522}{36.000}.$$

Temos, portanto, a equação

$$\frac{4{,}5 \times 219 \times x}{36.000} + \frac{5{,}4 \times x \times 522}{36\,000} = 126.810.$$

Resolvida, $x = 1.200.000$.

Resp. O capital era de 1:200$000.

72. — Comem em um hotel 20 pessoas, entre homens e mulheres, e gastam em certo tempo 725$000. Cada homem paga 40$ e cada mulher 25$. Quantos são os homens e quantas as mulheres?

Seja x o numero de homens; o de mulheres será $20 - x$.

$$40.000\,x + 25.000\,(20 - x) = 725.000.$$

Resolvida esta equação, $x = 15$.

Resp. 15 homens e $20 - 15 = 5$ mulheres.

Os exemplos acima, extrahidos de alguns compendios classicos de algebra e arithmetica, são dados apenas com o intuito de familiarizar os discipulos com o modo de pôr em equação os problemas. Para prosecução do estudo, será conveniente adoptar alguns desses compendios.

CAPITULO IV

Numeros positivos e negativos

41. — Se tivermos de subtrahir 9 de 5, conviremos, sem duvida, que esta operação é impossivel, pelo menos no sentido commum, da arithmetica. Não podemos de uma quantidade menor retirar uma maior.

Para um fim de *generalização*, a algebra não nos diz impossivel tal operação, e ensina-nos que

$5 - 9 = -4$ (*menos* quatro)

$8 - 10 = -2$ (*menos* dois)

$1 - 8 = -7$ (*menos* sete)

etc., etc.

Os numeros -4, -2, -7 são numeros *negativos*. Em opposição, todos os numeros precedidos do signal $+$, ou que não são precedidos de signal algum, denominam-se numeros *positivos*.

A arithmetica só se preoccupa com os numeros positivos; a algebra lida tambem com os negativos.

A introducção dos numeros negativos é de grande vantagem para a interpretação dos resultados de certos problemas e para a representação de certos factos. Assim, se eu tenho em mãos de uma pessoa B certa quantia, 10 libras, p. ex., posso dizer que B me deve 10 libras, e se vou fazendo retiradas successivas, a divida de B vae diminuindo:

	B deve-me	10 libras;
se eu retiro 2,	B deve-me	10 — 2 = 8 libras;
quando tiver retirado 3,	B deve-me	10 — 3 = 7 libras;
quando tiver retirado 5,	B deve-me	10 — 5 = 5 libras;
quando tiver retirado 9,	B deve-me	10 — 9 = 1 libra;
quando tiver retirado 10,	B deve-me	10 — 10 = 0 ou
	nada me deve.	

Se agora continúo a *retirar* dinheiro, B me dirá, quando eu tiver retirado mais 2 libras:

— Você tinha 10 e já retirou 10; se quer retirar não 10, mas 12, é você quem me fica devendo 2...

Realmente, se eu tinha 10 e retirei 8, B deve-me 2; se eu tinha 10 e retirei 10, B deve-me 0, mas se eu possuia apenas 10 e retirei 12, eu é que passo a dever 2 a B; se tinha 10 e retirei 15, devo-lhe 5 e assim por deante.

Ha, como se vê, uma *mudança no sentido* da contagem: era B quem me devia, agora sou eu quem deve a B.

42. — A algebra representa pela mudança de signal essa mudança de sentido, e então pode, por convenção dizer que

$$10 - 7 = 3$$
$$10 - 8 = 2$$
$$10 - 9 = 1$$
$$10 - 10 = 0$$
$$10 - 11 = -1$$
$$10 - 12 = -2$$
$$10 - 13 = -3$$

e assim por deante.

De um ponto em uma estrada, eu posso andar 3, 4, 5, 6 metros *para a frente* e *para traz*; quando não se menciona a direcção, entende-se sempre que é *para adeante*; se, em algebra, se disser que eu andei —4 metros, (*menos* 4 metros), isso significa que andei 4 metros *para traz*.

Se eu annoto os meus *lucros*: 8, 9, 12, etc., e uma vez annotar — 7, isto significa que tive uma *perda*, um *prejuizo* de 7.

O signal — (*menos*) indica, pois, que certo facto se dá ao contrario do que se estava admittindo no raciocinio.

Assim, em certo problema, se pergunta — a que distancia de uma cidade A, em uma linha ferrea, se deu determinado facto. Feitas as contas, vem o resultado — 4 km. Isto significa que, se haviamos

admittido o facto *além* de A, elle se dá 4 km. *aquem*; se o haviamos admittido *aquem*, elle se dá *além*.

Numeros negativos são, portanto, para os effeitos dos problemas, numeros contados em sentido diverso do habitual, ou daquelle que se havia imaginado.

43. — Sommar numeros negativos. — Em meu caderno estão annotadas as seguintes marchas diarias, em kilometros, ao longo de uma estrada:

Dia	5	4
«	6	6
«	7	7
«	8	3
«	9	−8
«	10	−3
«	11	4
«	12	5.

Isto quer dizer que do dia 5 ao dia 8 marchei, sempre para a frente, 4, 6, 7 e 3 km. No dia 9 recuei 8 km. e no dia 10 outros 3. No dia 11 comecei de novo a avançar. Se eu pretender saber a quantos km. me encontro do ponto de partida, preciso contar os km. que avancei, depois os que recuei, e fazer a subtracção.

Avancei:

$$4+6+7+3+4+5=29 \text{ km.};$$

recuei:

$$8+3=11 \text{ km.}$$

Meu avanço total foi de $29-11=18$ km. do ponto de partida, no dia 12.

Para sommar, pois, as quantidades negativas, fizemol-o como se o não fossem; apenas a somma foi *negativa*, foi *recúo*. Podemos, portanto, estabelecer que

para sommar (-8) com (-3) fizemos $-(8+3)=-11$.

Do mesmo modo

$$(-5)+(-7)=-12$$
$$(-6)+(-2)=-8$$
$$(-3)+(-9)=-12$$
$$(-1)+(-1)=-2$$
$$(-4)+(-2)=-6.$$

Os parentheses são dispensados quando se trata de sommas, como nos exemplos anteriores,

e escreve-se:

$$-5-7=-12$$
$$-6-2=-8$$
$$-3-9=-12$$
$$-1-1=-2$$
$$-4-2=-6.$$

44. — Tornemos ao caso primitivamente considerado. Em meu caderno fui annotando uma série de marchas diarias:

Avanço de 4 km., *mais* um avanço de 6, *mais* um avanço de 7, *mais* um avanço de 3, *mais* um recúo de 8, *mais* um recúo de 3, *mais* um avanço de 4, *mais* um avanço de 5, emfim uma *somma de marchas*. Mas sempre que foi indicada *mais uma marcha para traz* (*mais um recúo*), o resultado foi o mesmo que diminuir o avanço total. Portanto, sommar um numero negativo a um positivo é o mesmo que subtrahir um positivo.

Consideremos agora um avanço de 4 km. seguido de um recúo de 4. Representaremos assim as marchas:

$$4+(-4) \text{ ou } 4-4=0.$$

O resultado é nullo, isto é, quem avança 4 km. e recúa outros tantos, permanece no ponto de partida.

Seja um avanço de 4 km. e um recúo de 7. O resultado será que quem avança 4 e recúa 7 km.

vem a ficar 3 km. aquém do ponto de partida, a uma distancia que se escreve -3:

$$4+(-7)=4-7=-3.$$

Do mesmo modo

$$5+(-8)=5-8=-3$$
$$6+(-7)=6-7=-1$$
$$15+(-20)=15-20=-5$$

e assim por deante.

EXERCICIO

1. $-5-2-7=-14$
2. $-8-9-7-2-4=-30$
3. $-7-16=-23$
4. $18-8-5=18-13=5$
5. $14-7-10=14-17=-3$
6. $-x-2x=-3x$
7. $-5x-8x-2x=-15x$
8. $4x-8x-3x=4x-11x=-7x$
9. $18x-7x-2x-13x=18x-22x=-4x$
10. $15x+8-17x-12=-2x-4.$

45. — ***Subtrahir numeros negativos.*** — Assim como *sommar numeros negativos é o mesmo que subtrahil-os positivos*, tambem *subtrahir numeros negativos é o mesmo que sommal-os positivos*.

Assim, se de 4 quizermos subtrahir (-9) devemos escrever

$$4-(-9)=4+9=13.$$

Do mesmo modo

$$5-(-7)=5+7=12$$
$$1-(-1)=1+1=2$$
$$7-(-8)=7+8=15$$
$$6-(-1)=6+1=7.$$

Para comprehendel-o melhor, basta raciocinar que *diminuir um recúo* equivale a *avançar; diminuir um débito* equivale a *augmentar um crédito*.

Exercicio

1. $4-(7-9)=4-(-2)=4+2=6$
2. $4-(-7-9)=4-(-16)=4+16=20$
3. $4-(9-7)=4-2=2$
4. $5-(-7-6)=5-(-13)=5+13=18.$

CAPITULO V

Problemas e equações com duas incognitas

46. — Algumas vezes succede que o problema apresenta *duas* incognitas verdadeiras. E' preciso então estabelecer *duas* equações distinctas. Seja, para exemplo, o seguinte problema :

Pedro diz a José: Tenho o dobro da idade que tinhas quando eu tinha a idade que tens; e quando tiveres a idade que tenho, a somma de nossas idades será igual a 63 annos. Quaes são as duas idades?

Ha ahi duas incognitas: a idade de Pedro e a de José. Representamos a primeira por x e a segunda por y. A differença entre as duas é $x-y$, isto é, Pedro tem $x-y$ mais annos do que José. Quando Pedro tinha a idade actual de José, este tinha

$$y-(x-y) \quad \text{ou} \quad 2y-x.$$

Como Pedro tem o dobro disso, temos

$$x=2(2y-x). \qquad (1)$$

Quando José tiver a idade que Pedro tem hoje, isto é, quando tiver x, Pedro terá $x + (x - y)$ ou $2x - y$, e então

$$(2x - y) + x = 63. \qquad (2)$$

As duas equações (1) e (2) formam um *systema de duas equações com duas incognitas*. Vejamos como resolvel-o.

Escreveremos:

$$\begin{array}{c} x = 2(2y - x) \\ (2x - y) + x = 63 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c} x = 4y - 2x \\ 3x - y = 63 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c} x + 2x - 4y = 0 \\ 3x - y = 63 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{cr} 3x - 4y = 0 & (3) \\ 3x - y = 63. & (4) \end{array}$$

Podemos, como se sabe, sommar ou subtrahir a ambos os membros de uma equação *a mesma quantidade*; portanto, podemos subtrahir a ambos os membros da 2ª equação, que é $3x - y = 63$, a mesma quadtidade $3x - 4y$ (1º membro da outra). Mas como $3x - 4y$ é o mesmo que 0, podemos

subtrahir a 1ª equação *membro a membro* da 2ª, isto é, do 1º membro da 2ª subtrahir o 1º membro da 1ª; do 2º membro da 2ª subtrahir o 2º da 1ª e virá

$$3x - y - (3x - 4y) = 63 - 0$$

ou

$$3x - y - 3x + 4y = 63$$

ou

$$3y = 63,$$

donde

$$y = 21.$$

Se tomarmos agora, a equação (3) e substituirmos y por seu valor agora achado, virá

$$3x - 4 \times 21 = 0$$

ou

$$3x - 84 = 0$$

ou

$$3x = 84,$$

donde

$$x = 28.$$

Os valores de x e y são, pois,

$$x = 28 \qquad y = 21.$$

47. — Que fizemos para resolver o systema? Preparámos as duas equações como para resol-

vel-as, separando os termos conhecidos dos desconhecidos. Subtrahiamos *membro a membro* uma equação da outra, de modo a fazer desapparecer uma das incognitas, e assim ficámos reduzidos a *uma só equação* com *uma só incognita*.

Nem sempre a operação é exactamente esta, conforme vamos ver, estudando outros systemas de equações.

Seja o systema

$$2x - y = 1 \qquad (1)$$
$$x + 3y = 11. \qquad (2)$$

Vamos eliminar a incognita x. Para isto é necessario, antes de tudo, que ella entre em ambas as equações *com o mesmo coefficiente*; portanto havemos de multiplicar ambos os membros da segunda equação por 2, e o systema ficará

$$2x - y = 1$$
$$2x + 6y = 22.$$

Subtrahindo agora a 1ª da 2ª:

$$2x + 6y - (2x - y) = 22 - 1$$

ou

$$2x + 6y - 2x + y = 21$$

ou

$$7y = 21,$$

donde

$$y = 3.$$

Substituindo agora y na equação (1) por seu valor,

$2x - 3 = 1$. Resolvida esta equação, $x = 12$.

As soluções, ou as *raizes* do systema de equações, são $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$

48. — Seja o systema

$$3x - 2y = 5$$
$$2x + 4y = 14.$$

Vamos egualar os coefficientes de y, para o que bastará multiplicar ambos os membros da 1ª equação por 2:

$$6x - 4y = 10$$
$$2x + 4y = 14.$$

Se agora sommarmos, membro a membro, as equações, virá

$$6x - 4y + (2x + 4y) = 10 + 14$$

ou

$$6x - 4y + 2x + 4y = 24$$

ou

$$8x = 24,$$

donde

$$x = 3.$$

Substituindo, em uma das equações dadas, x por seu valor, teremos uma equação nova, com uma incognita só, y, e essa equação, resolvida, nos dará $y = 2$.

49. — Dos exemplos vistos, podemos concluir já — para resolver um systema de duas equações com duas incognitas, devemos tornar eguaes os coefficientes de uma das incognitas, e em seguida sommar ou subtrahir membro a membro as equações, conforme os signaes dessas incognitas: quando são os mesmos signaes, é preciso subtrahir; e quando são signaes contrarios é preciso sommar. Assim se elimina uma das incognitas, e se descobre o valor da outra. Para achar o valor da que foi eliminada, entra-se, em uma das equações, com o valor da que foi descoberta, e assim se obtem uma nova equação com uma só incognita.

50. — Para egualar os coefficientes de uma das incognitas, nem sempre é bastante multiplicar ambos os membros de uma das equações. Seja o systema

$$5x + 8y = 51$$
$$2x - 3y = 8.$$

Supponhamos que resolvemos eliminar x. O menor multiplo commum de 5 e 2 é 10. Multipliquemos, pois, ambos os membros da 1ª equação por 2, para que venha x com o coefficiente 10, e ambos os membros da 2ª por 5 para o mesmo fim:

$$10x + 16y = 102$$
$$10x - 15y = 40.$$

Subtrahindo agora a 2ª da 1ª vem

$$10x + 16y - (10x - 15y) = 102 - 40$$

ou

$$10x + 16y - 10x + 15y = 62$$

ou

$$31y = 62,$$

donde

$$y = 2.$$

Substituindo o valor de y em uma das equações dadas, etc., se achará $x = 7$.

51. — Ha varios methodos para eliminar uma das incognitas. Esse que ensinámos é o de mais facil applicação. Outros serão estudados no curso de algebra.

EXERCICIO

1.	$6x + 7y = 59$;	$4x - 2y = 26$	*Resp.*	$x = 7\frac{1}{2}$,	$y = 2$
2.	$3x + 2y = 13$;	$5x + 7y = 29$	«	$x = 3$,	$y = 2$
3.	$5x - 2y = 13$;	$3x + 8y = 63$	«	$x = 5$,	$y = 6$
4.	$2x + 5y = 29$;	$6x + 7y = 47$	«	$x = 2$,	$y = 5$
5.	$3x + 9y = 45$;	$4x + 5y = 32$	«	$x = 3$,	$y = 4$
6.	$x + 9y = 75$;	$8x + 3y = 48$	«	$x = 3$,	$y = 8$.

Systemas de mais de duas equações. — *Ha ainda systemas de tres equações, quatro equações, etc., com numero correspondente de incognitas. Os problemas communs da arithmetica resolvem-se, porém, mais geralmente, por equações de uma só incognita, e por isto deixamos de dar a esta ultima materia certo desenvolvimento, que se encontrará nos livros de algebra.*

Equações do 2º grau. — *Não nos pareceu tambem opportuno tratar, nesta obra elementarissima, de mera introducção, dos problemas e das equações do 2º grau. Será, todavia, facil aos professores elevar até ahi seu ensino, desde que seja preciso.*

FIM